

EXAMEN COMPLETO OPCIÓN A

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: El examen presenta dos opciones: A y B. El estudiante deberá elegir una de ellas y contestar razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción. Para la realización de esta prueba puede utilizarse calculadora científica, siempre que no disponga de la capacidad gráfica o de cálculo simbólico.

TIEMPO MÁXIMO: Una hora y media.

CALIFICACIÓN: Cada ejercicio lleva indicada su puntuación máxima.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Una empresa fabrica láminas de aluminio de dos grosores, finas y gruesas, y dispone cada mes de 400 kg de aluminio y 450 horas de trabajo para fabricarlas. Cada m² de lámina fina necesita 5 kg de aluminio y 10 horas de trabajo, y deja una ganancia de 45 euros. Cada m² de lámina gruesa necesita 20 kg de aluminio y 15 horas de trabajo, y deja una ganancia de 80 euros. ¿Cuántos m² de cada tipo de lámina debe fabricar la empresa al mes para que la ganancia sea máxima, y a cuánto asciende ésta?

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dada la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4}$$

- Encontrar las asíntotas de la función.
- Especificar el signo de la función en las distintas regiones en las que está definida.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Los tigres de cierto país proceden de tres reservas: el 30 % de la primera, el 25 % de la segunda y el 45 % de la tercera. La proporción de tigres albinos de la primera reserva es 0,2 %, mientras que dicha proporción es 0,5 % en la segunda, y 0,1 % en la tercera. ¿Cuál es la probabilidad de que un tigre de ese país sea albino?

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

La duración de la batería de cierto modelo de teléfono móvil se puede aproximar por una distribución normal con una desviación típica de 5 meses. Se toma una muestra aleatoria simple de 310 baterías y se obtienen las siguientes duraciones (en meses):

33, 34, 26, 37, 30, 39, 26, 31, 36, 19

Hallar un intervalo de confianza al 95 % para la duración media de ese modelo de batería.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependientes del parámetro real a .

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -2x + 3y + z = 1 \\ -x + ay + 3z = 3 \end{cases}$$

- (a) Discutir el sistema para los distintos valores de a .
(b) Resolver el sistema para $a = 2$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Representar gráficamente la región acotada limitada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = 9 - x^2, \quad g(x) = 3 + x$$

y obtener su área.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Una urna contiene 10 bolas blancas y 5 negras. Se extraen dos bolas al azar sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

El peso en kg de los estudiantes universitarios de una gran ciudad se supone aproximado por una distribución normal con media 60 kg y desviación típica 8 kg. Se toman 100 muestras aleatorias simples de 64 estudiantes cada una. Se pide:

- (a) La media y la desviación típica de la distribución de la media muestral.
(b) ¿En cuántas de las 100 muestras cabe esperar una media entre 59 y 61 kg?

OPCIÓN A

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

Se trata de un problema de programación lineal.

Con los datos anteriores se obtiene la tabla:

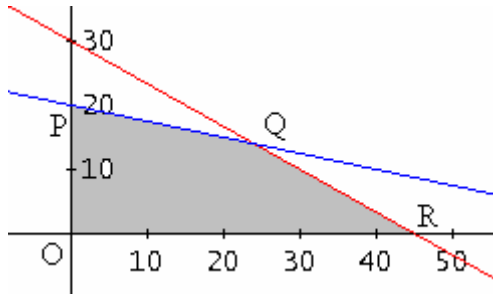
	Cantidad	Aluminio	Trabajo	Ganancia
Lámina fina	x	5x	10x	45x
Lámina gruesa	y	20y	15y	80y
Disponibilidades		400 kg	450 h	

El objetivo es maximizar la ganancia, que es:

$$G(x, y) = 45x + 80y$$

restringida por: $5x + 20y \leq 400$
 $10x + 15y \leq 450$
 $x \geq 0; y \geq 0$

Estas restricciones generan la región factible (sombreada) en la siguiente figura:



Los vértices son:

$$O = (0, 0), P = (0, 20), Q: \begin{cases} 5x + 20y = 400 \\ 10x + 15y = 450 \end{cases} \Rightarrow Q = (24, 14) \text{ y } R = (45, 0)$$

Como sabemos, los valores máximos y mínimos de la función objetivo se encuentran en alguno de esos vértices.

La ganancia para cada una de esas soluciones es:

En O, $G(0, 0) = 0$
 En P, $G(0, 20) = 1600 \text{ €}$
 En Q, $G(24, 14) = 2200 \text{ €}$
 En R, $G(45, 0) = 2025 \text{ €}$

La ganancia máxima, que asciende a 2200 euros, se obtiene fabricando 24 láminas finas y 14 gruesas.

EJERCICIO 2

(a) La curva tiene asíntotas verticales en los puntos que anulan al denominador, que son $x = -2$ y $x = 2$, pues:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4} = \left(\frac{-12}{0} \right) = \infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4} = \left(\frac{-12}{0} \right) = \infty$$

Las asíntotas son las rectas $x = -2$ y $x = 2$

También tiene una asíntota horizontal, pues

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4} = 1$$

La asíntota es la recta $y = 1$

(b) Como los términos de la fracción algebraica se anulan en los puntos $x = -4$, $x = 4$, $x = -2$ y $x = 2$, hay que estudiar el signo en los intervalos que se indican en la siguiente recta real:



Si $x < -4$, el numerador y el denominador de $f(x)$ son positivos $\Rightarrow f(x)$ es positiva.

Si $-4 < x < -2$, el numerador es negativo y el denominador positivo $\Rightarrow f(x)$ es negativa.

Si $-2 < x < 2$, el numerador y el denominador de $f(x)$ son negativos $\Rightarrow f(x)$ es positiva.

Si $2 < x < 4$, el numerador es negativo y el denominador positivo $\Rightarrow f(x)$ es negativa.

Si $x > 4$, el numerador y el denominador de $f(x)$ son positivos $\Rightarrow f(x)$ es positiva.

EJERCICIO 3

Con los datos del problema se puede construir la siguiente tabla:

	Reserva I	Reserva II	Reserva III	Total
Total tigres (%)	30	25	45	100
Albinos por reserva (%)	0,2 % de 30 = 0,06	0,5 % de 25 = 0,125	0,1 % de 45 = 0,045	0,23

Con esto, y como puede leerse directamente en la tabla:

$$\begin{aligned} P(\text{tigre albino}) &= P(\text{Reserva I}) \cdot P(\text{Albino/Reserva I}) + \\ &+ P(\text{Reserva II}) \cdot P(\text{Albino/Reserva II}) + \\ &+ P(\text{Reserva III}) \cdot P(\text{Albino/Reserva III}) = \\ &= 30 \cdot 0,002 + 25 \cdot 0,005 + 45 \cdot 0,001 = 0,23 \end{aligned}$$

EJERCICIO 4

El intervalo de confianza de la media poblacional, para las muestras de tamaño muestral n de media \bar{x} y desviación típica σ es:

$$\left(\bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

siendo $Z_{\alpha/2}$ el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza de $1 - \alpha$

En este caso $\bar{x} = \frac{33 + 34 + 26 + 37 + 30 + 39 + 26 + 31 + 36 + 19}{10} = 31,1$; $\sigma = 5$; el tamaño muestral es $n = 10$; y $Z_{\alpha/2} = 1,96$

Por tanto, el intervalo de confianza para la media es

$$\left(31,1 - 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{10}}, 31,1 + 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{10}} \right) = (31,1 - 3,1, 31,1 + 3,1) = (28, 34,2)$$