Selectividad Madrid Septiembre opción B

Ejercicio 1º: (dos métodos)

*Discutir el sistema para los diferentes valores de **a** y resolver para **a=2***

$$\begin{cases} x & +y & +2z=2 \\ -2x & +3y & +z=1 \\ -x & +ay & +3z=3 \end{cases}$$

Método de Gauss:

La matriz asociada es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & a & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} 1ª \\ 2ª+2.1ª \\ 3ª+1ª \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & a+1 & 5 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} 1ª \\ 2ª \\ 3ª-2ª \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & a-4 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Discusión:

- Si **a=4** el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO porque la última ecuación es toda de ceros y se puede quitar, por lo que habría dos ecuaciones y tres incógnitas. Una de las incógnitas habría que pasarla al segundo miembro convertida en parámetro (por ejemplo, z=λ)
- Si **a≠4** el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO

Solución para a=2

Estamos en el segundo supuesto. El sistema ya escalonado queda:

$$\begin{cases} x & +y & +2z=2 \\ & 5y & +5z=5 \\ & -2y & =0 \end{cases}$$

Como ya está escalonado empezamos por la última fila:

3ª -> **y=0**

2ª -> 5z=5; **z=1**

1ª -> x+0+2=2; **x=0**

Por determinantes:

Por determinantes consideramos que **A** es la **matriz de los coeficientes** y **A'** es la **matriz ampliada**. Los casos que se pueden presentar son los siguientes:

rango(A)=rango(A')=número de incógnitas el sistema es **compatible determinado**;
rango(A)=rango(A')<número de incógnitas el sistema es **compatible indeterminado**;
rango (A)<rango(A') el sistema es **INCOMPATIBLE**

Vamos a estudiar el rango de la matriz de coeficientes en este caso.

La matriz de coeficientes es: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & a & 3 \end{pmatrix}$ su determinante es: $|A|=9-4a-1+6-a+6=20-5a$

El método siempre es el mismo: hacemos $|A|=0$ y buscamos para qué valores ocurre esto, en este caso es para **a=4**. En este caso el **rango de A = 2**

$Si\ \ a\neq 4\ \ entonces\ \ |A|\neq 0$ y el **rango de A = 3**

DISCUSIÓN DEL SISTEMA:

- $a\neq 4$ ran(A)=3=ran(A') porque aunque añadamos una fila mas de coeficientes el rango no puede aumentar porque ya tiene el valor máximo porque son tres filas. En este caso el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (es decir, solución única).
- $a=4$ ran(A)=2, hay que ver el rango de A' teniendo en cuenta que como vamos a

añadir la columna de coeficientes tenemos que quitar otra de las columnas puesto que una sobra por ser el rango (A)=2. Podemos quitar la segunda columna y añadimos al final la de coeficientes.

$$A'=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ -2 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 3\end{pmatrix}$$

La matriz queda así, y su determinante es cero porque tiene dos columnas iguales.
En este caso el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO, (es decir, infinitas soluciones)

Resolver para a=2: el sistema es compatible determinado y su solución es, por Cramer: Sustituímos en la matriz de coeficientes la fila correspondiente a la incógnita por los términos independientes:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 3\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{18+4+3-18-4-3}{20-10}=\frac{0}{10}=0$$

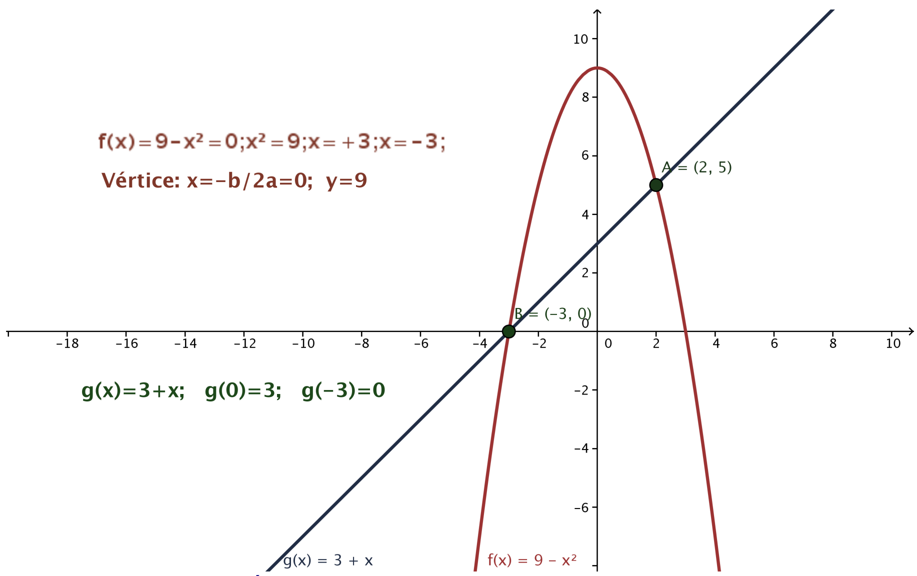
Podíamos habernos ahorrado el cálculo si nos fijamos en que los columnas 1ª y 3ª son iguales y, por tanto, el determinante es cero. Pasa igual en el cálculo de la y, aunque no en la de z.

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ -2 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 3\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{0}{10}=0 \qquad z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 3\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{9-8-1+6-2+6}{10}=\frac{10}{10}=1$$

El método de Gauss es menos aparente pero mucho más sencillo, el problema es que a veces no se sabe por donde seguir y podemos atascarnos.

Ejercicio 2º(3p) Representa gráficamente la región limitada por las gráficas de las funciones **f(x)=9-x²**; **g(x)=3+x** y obtén el área comprendida entre ellas.

Aunque para hallar el área no hace falta representar, en este caso me lo piden explícitamente por lo que es ineludible. Se trata de una parábola y una recta, en el caso de la recta buscamos dos puntos (suelen ser los cortes con X e Y) y en el caso de la parábola se trata de encontrar los cortes con los ejes y el vértice. Finalmente conviene encontrar los puntos de corte de parábola y recta. Procedemos:



Los cortes entre recta y parábola los encontramos igualando las dos ecuaciones:

$$f(x)=g(x) \rightarrow 9-x^2=3+x \rightarrow x^2+x-6=0 \rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm5}{2} \rightarrow x=\left\langle\begin{matrix}2\\-3\end{matrix}\right.$$

Para hallar el área comprendida entre las dos curvas procedemos como siempre: restamos ambas funciones y obtenemos la función resultado que va a tener los puntos de corte con el eje X justo donde son iguales ambas funciones.

Por tanto la función diferencia:

$f(x)-g(x) = 9-x^2-(3+x) = -x^2-x+6$ corta al eje X para $x=-3$; $x=2$, (si no te lo crees hazlo)

I) El recinto de integración, único, es **(-3,2)**

II) Primitiva: $G(x)=\int(-x^2-x+6)=\frac{-x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+6x$

III)
$$G(-3)=\frac{-(-3)^3}{3}-\frac{(-3)^2}{2}+6(-3)=9-\frac{9}{2}-18=\frac{-9}{2}-9=\frac{-27}{2}$$
$$G(2)=\frac{-(2)^3}{3}-\frac{(2)^2}{2}+6(2)=\frac{-8}{3}-2+12=\frac{22}{3}$$

IV) $G(2)-G(-3)=\frac{22}{3}+\frac{27}{2}=\frac{125}{6}=20,83$

V) Área=20,83 u²

Ejercicio 3º(2p) Una urna tiene 10 bolas blancas y 5 negras. Se extraen dos bolas al azar sin reemplazamiento ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

P(blanca y blanca)=10/15.9/14=9/21

P(negra y negra)=5/15.4/14=9/21=2/21

P (mismo color)=9/21+2/21=11/21=**0,5238**

Ejercicio 4º(2p)
El peso en kgr de los estudiantes sigue una N(60,8). Se toman 100 muestras de 64 estudiantes. Se pide:
a) La media y la desviación típica de la distribución de la media muestral.
b) ¿En cuántas de las 100 muestras cabe esperar una media entre 59kgr. y 61kgr.

a) $\bar{x}=N\left(60,\frac{8}{\sqrt{64}}\right)=N(60,1)$

b) El dato de las 100 muestras tiene que ver con el hecho de que se pide no tanto la probabilidad como la cantidad de muestras que cumplen la condición de estar entre esos pesos. Por ello vamos a calcular primero la probabilidad de que una media muestral esté entre esos dos valores y multiplicando por 100 obtendremos las que pueden estar.

$$P(59<\bar{x}<61)=P\left(\frac{59-61}{1}<z<\frac{61-60}{1}\right)=P(-1<z<1)=P(z<1)-P(z<-1)=$$
$$P(z<1)-(1-P(z<1))=2P(z<1)-1=2\cdot 0,8413-1=0,6826=68,26\%$$

Por tanto, si hay 100 muestras cabe esperar que 68 tengan una media comprendida entre 59 y 61 kgr.