22/04/09

# Reglas de derivación

$f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$ $\qquad D(k) = 0$

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ $\qquad D(x) = 1$

$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n\,x^{n-1}$ $\qquad \boxed{D(x^n) = n \cdot x^{n-1}}$

$D(kx) = k$ $\qquad D(f \pm g) = f' \pm g'$

$\boxed{D(kf)} = k f'$

Ejemplos: $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -1\, x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$f(x) = \frac{3}{x^2} = 3 \cdot x^{-2} \Rightarrow f'(x) = 3(-2) \cdot x^{-3} = -\frac{6}{x^3}$

(182) 2° $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} + \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{2} x^{-1/2} + \frac{1}{3} x^{-2/3} =$

$= \frac{1}{2\,x^{1/2}} + \frac{1}{3\,x^{2/3}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

3° $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt[3]{5x} = 2^{1/2} \cdot x^{1/2} + 5^{1/3} \cdot x^{1/3} \Rightarrow$

$f'(x) = 2^{1/2} \cdot \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} + 5^{1/3} \cdot \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} =$

$= \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} + \sqrt[3]{5} \cdot \frac{1}{3} x^{-2/3} =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt[3]{5}}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

+ **Regla:** $D(f^n) = n \cdot f' \cdot f^{n-1}$

$$f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt[3]{5x} = (2x)^{1/2} + (5x)^{1/3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2x)^{1/2 - 1} + \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot (5x)^{1/3 - 1} =$$

$$= (2x)^{-1/2} + \frac{5}{3}(5x)^{-2/3} = \frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{5}{3\sqrt[3]{(5x)^2}}$$

**Regla:** $D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

Ejemplo

$$D\left(\frac{2x^2+3x}{x^3-2}\right) = \frac{(4x+3)(x^3-2) - 3x^2(2x^2+3x)}{(x^3-2)^2} =$$

**Regla:** $D(fg) = f'g + g'f$

Ejemplo

$$D\left(2x(x+1)^2\right) = 2(x+1)^2 + 2(x+1)2x$$

(82) 4°

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} = x^{-1} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = x^{-3/2}$$

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^{-3/2 - 1} = -\frac{3}{2}x^{-5/2} = \frac{3}{2\sqrt{x^5}}$$

$10^\circ$ $h(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1} \Rightarrow h'(x) = \dfrac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2} =$

$\dfrac{f'g - g'f}{g^2}$ $h'(x) = \dfrac{\cancel{2x^3} - 2x - \cancel{2x^3} - 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$

Regras: $D(\operatorname{sen} x) = \cos x$

$D(\cos x) = -\operatorname{sen} x$

$D(e^x) = e^x$

$D(\ln x) = \dfrac{1}{x}$

$D(\operatorname{tg} x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

(182) $5^\circ$ $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$ $(fg)' = f'g + g'f$

$f'(x) = \cos x \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

$6^\circ$ $f(x) = \operatorname{tg} x$ Experta como oriente

a deriva

$f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$

$$\boxed{f'(x)} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \boxed{1 + tg^2 x}$$

7° Deriva $f(x) = x e^x$ $\quad (fg)' = f'g + g'f$

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + e^x \cdot x = e^x + e^x \cdot x = e^x(1+x)$$

11° $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 5x + 3}{x}$;

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 6x - 5)x - (x^3 + 3x^2 - 5x + 3)}{x^2} =$$

$$= \frac{3x^3 + 6x^2 - \cancel{5x} - x^3 - 3x^2 + \cancel{5x} - 3}{x^2} =$$

$$= \frac{2x^3 + 3x^2 - 3}{x^2}$$

CASA (195) 15° 16° 17° 18° 19°

20° $f(x) = \ln(3x-1)$; derivada em $x = 3$

$$(\ln f)' = \frac{f'}{f}$$

$$f'(x) = \frac{3}{3x-1}$$

$$f'(3) = \frac{3}{3 \cdot 3 - 1} = \frac{3}{8}$$

# Utilidad de la derivada

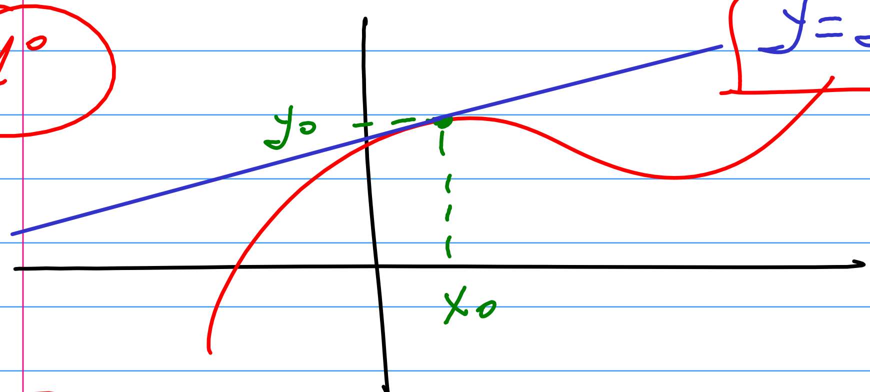
1º Hallar las tangentes a una curva en un punto.

2º Estudiar el crecimiento y decrecimiento de una función

3a Buscar los puntos singulares y, en concreto, los máximos y mínimos.

1º

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$




2º $f'(x) > 0 \rightarrow$ función creciente

$f'(x) < 0 \rightarrow$ función decreciente

Estudiamos los intervalos donde $f'$ es positiva y negativa

3º Los puntos singulares son aquellos en los que $f'(x) = 0$. De ellos, algunos son máximos y mínimos.

(184) 1° Calcula la función derivada de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$, halla:

a) Las pendientes de las tangentes en las abscisas $-1, 1$ y $3$

$f'(x) = 3x^2 - 8x$ || $f'(-1) = 3(-1)^2 - 8(-1) = 3 + 8 = 11$

$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 = 3 - 8 = -5$

$f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 = 27 - 24 = 3$

b) Ecuaciones de dichas rectas tangentes

$$\boxed{y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)}$$

$\boxed{x = -1} \rightarrow y = -4 + 11(x+1) = -4 + 11x + 11 = \boxed{11x + 7}$

$\left( f(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 + 1 = -1 - 4 + 1 = -4 \right)$

tangente en $x = -1$ $\rightarrow$ $\boxed{y = 11x + 7}$

$\boxed{x = 1}$ $y = -2 - 5(x-1) = -2 - 5x + 5 = \boxed{-5x + 3}$

$\left( f(1) = 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 1 = 1 - 4 + 1 = -2 \right)$

tangente en $x = 1$ $\rightarrow$ $\boxed{y = -5x + 3}$

$\boxed{x = 3}$ $y = -8 + 3(x-3) = -8 + 3x - 9 = \boxed{3x - 17}$

$$\left( \begin{array}{l} f(3) = 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 1 = \\ = 27 - 36 + 1 = -8 \end{array} \right)$$ Tangente en $x = 3$ $\rightarrow y = 3x - 17$

d) ¿Es $f(x)$ creciente o decreciente en $x = 2$?

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 = 12 - 16 = -4 < 0$$

Decreciente

c) Las abscisas de los posibles máximos o mínimos

puntos singulares

$$f'(x) = 3x^2 - 8x = 0 \rightarrow x(3x - 8) = 0 \rightarrow x = 0$$

$$\rightarrow 3x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-8}{3}$$

para $x = 0$ ; $x = \frac{-8}{3}$

puede haber máximo o mínimo