27/04/09 Examen 04/05/09. Tema 7°

(195) 38° Halla los puntos en los que la derivada es igual a cero en las siguientes funciones:

a) $y = 3x^2 - 2x + 1$

a) $y' = 6x - 2 = 0$

$\Rightarrow 6x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$y = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 = \frac{3}{9} - \frac{2}{3} + 1 =$

$= \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{3}{3} = \frac{2}{3}$

El punto donde la derivada es cero es el $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

b) $y = x^3 - 3x$

$y' = 3x^2 - 3 = 0$

$3x^2 = 3$

$x^2 = 1$

$x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

$x = 1 \Rightarrow y = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2$

$(1, -2)$

$x = -1 \Rightarrow y = (-1)^3 - 3(-1) =$

$= -1 + 3 = 2$

$(-1, 2)$

39° Obtén los puntos donde $f'(x) = 1$ en los siguientes casos:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

$f'(x) = 2x - 3 = 1 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

$y = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$

El punto es: $(2, 0)$

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x+5}$ $\qquad \left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x+5) - 1(x+1)}{(x+5)^2} = \frac{x+5-x-1}{(x+5)^2} = \frac{4}{(x+5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4}{(x+5)^2} = 1 \rightarrow 4 = (x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$$

$$x^2 + 10x + 21 = 0 \rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 84}}{2} \rightarrow$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-10 \pm 4}{2} \begin{cases} \rightarrow \frac{-6}{2} = -3 \rightarrow f(-3) = \frac{-3+1}{-3+5} = \frac{-2}{2} = -1 \\ \rightarrow \frac{-14}{2} = -7 \rightarrow f(-7) = \frac{-7+1}{-7+5} = \frac{-6}{-2} = 3 \end{cases}$$

Los puntos donde $f'(x) = 1$ son:

$(-3, -1)$ y $(-7, 3)$

(195) 41° CASA

(196) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 5x + 6$ en el punto de abscisa $x = 2$ (43°)

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$x_0 = 2 \rightarrow y_0 = f(x_0) = f(2) = 2^2 - 5\cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$$

$f'(x) = 2x - 5 \qquad f'(2) = 2 \cdot 2 - 5 = -1$

$y = f(2) + f'(2)(x-2) = 0 - 1 \cdot (x-2)$

$$\boxed{y = -x + 2}$$

44° CASA

45° Escribe la ecuación de la tangente a $y = x^2 + 4x + 1$ cuya pendiente sea 2

Como la pendiente de la tangente es el valor de la derivada, entonces

$f'(x) = 2$

$f'(x) = 2x + 4 = 2 \Rightarrow 2x = 2 - 4 = -2$

$x = \frac{-2}{2} = -1$

$f(-1) = (-1)^2 + 4(-1) + 1 = 1 - 4 + 1 = -2$

$f'(-1) = 2(-1) + 4 = -2 + 4 = 2$

$y = f(-1) + f'(-1)(x+1) = \boxed{-2 + 2(x+1)}$

28/04/09

(195) 41° Halla los puntos en los que la derivada vale 0 en cada uno de los casos:

a) $y = 2x^2 - 8x + 5$ $\quad y' = 4x - 8 = 0 \rightarrow 4x = 8$ $\quad \boxed{x = 2}$

$f'(2) = 0$

b) $y = -x^2 + 5x$ $\quad y' = -2x + 5 = 0 \rightarrow \boxed{x = \frac{5}{2}}$

c) $y = x^4 - 4x^2$ $\quad y' = 4x^3 - 8x = 0$

$4x(x^2 - 2) = 0 \rightarrow x = 0$

$\rightarrow x^2 - 2 = 0$

$x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

d) $y = \frac{1}{x^2+1}$ $\quad y' = \frac{0\cdot(x^2+1) - 2x\cdot 1}{(x^2+1)^2} =$

$= -\frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow \boxed{x = 0}$

(196) 44° Escribe la ecuación de la recta tangente a $y = -x^2 + 2x + 5$ en el punto de abscisa $x = -1$

$y = f(x)$

(x_0, y_0)

$y = \underbrace{f(x_0)}_{y_0} + f'(x_0)(x - x_0)$

tangente en (x_0, y_0)

$x_0 = -1 \qquad f(x_0) = -(-1)^2 + 2(-1) + 5 = -1 - 2 + 5 = 2$

$f'(x) = -2x + 2 \Rightarrow f'(-1) = -2(-1) + 2 = 4$

$$y = 2 + 4(x+1) = \boxed{4x+6}$$

(195) 42° CASA

(196) 45° CASA

(196) 52° Obtén los intervalos de crecimiento y decrecimiento de estas funciones:

a) $y = \frac{3x+1}{2} \Rightarrow y' = \frac{3}{2} > 0$ creciente en $\mathbb{R}$

b) $y = 5 - 2x \Rightarrow y' = -2 < 0$ decreciente en $\mathbb{R}$

c) $y = x^2 - 3x + 2 \Rightarrow y' = 2x - 3$

para saber el signo de la derivada y', igualo a cero y busco por tanto cuando es $y' > 0$ ó < 0

$y' = 2x - 3 = 0$; $2x = 3$; $x = \frac{3}{2}$

	$f' < 0$	$f' = 0$	$f' > 0$	
0	$\searrow$	$3/2$	$\nearrow$	2

f es decreciente en $(-\infty, 3/2)$

f es creciente en $(3/2, \infty)$

d) $y = 2x - x^2 \to y' = 2 - 2x = 0 \to 2x = 2$

$\boxed{x = 1}$

$f' > 0 \qquad f' = 0 \qquad f' < 0$

$0 \qquad 1 \qquad 2$

$f' = 2 > 0 \qquad f' = 2 - 4 = -2 < 0$

e) y f) CASA

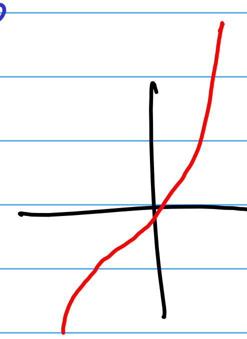
29/04/09

e) $y = x^3 \to y' = 3x^2 = 0 \to x = 0$

$f' > 0 \qquad f' = 0 \qquad f' > 0$

$-1 \qquad 0 \qquad 1$

$f' = 3 > 0 \qquad f' = 3 > 0$



f es creciente en $\mathbb{R}$

f) $y = x^3 - 3x \to y' = 3x^2 - 3 = 0 \to x^2 = \frac{3}{3} = 1$

$x = \pm 1$

$f'>0 \quad f'=0 \quad f'<0 \quad f'=0 \quad f'>0$

$-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2$

$f'(-2)=9>0$ $\quad f'(0)=-3<0$ $\quad f'(2)=3\cdot 2^2-3=9>0$

máximo $\quad$ mínimo

f es creciente en: $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

f es decreciente en: $(-1,1)$

(195) (42°) Comprueba que las siguientes funciones no tienen ningún punto en que la derivada sea cero.

a) $y=\dfrac{7x-3}{2}=\dfrac{7}{2}x-\dfrac{3}{2} \rightarrow y'=\dfrac{7}{2}\neq 0$

b) $y=2x^3+6x \rightarrow y'=6x^2+6=0 \rightarrow$

$x^2=\dfrac{-6}{6}=-1$

$x=\sqrt{-1}$ No existe.

c) $y=x^3-x^2+x \rightarrow y'=3x^2-2x+1=0$

No tiene solución $\quad x=\dfrac{2\pm\sqrt{4-12}}{6}=\dfrac{2\pm\sqrt{-8}}{6}$

d) $y=\dfrac{3x}{x-2}$ $\quad \left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-g'f}{g^2}$

$$y' = \frac{3(x-2)-3x}{(x-2)^2} = \frac{\cancel{3x}-6-\cancel{3x}}{(x-2)^2} = \frac{-6}{(x-2)^2} = 0$$

$\Rightarrow -6=0$ No es posible.

(196) (45°) Escribe la ecuación de la tangente a la función $y=x^2+4x+1$ cuya pendiente sea igual a 2.

$$f'(x) = 2x+4 = 2 \Rightarrow 2x = 2-4 \Rightarrow 2x=-2$$

$$\boxed{x=-1}$$

$$f(-1) = (-1)^2 + 4(-1) + 1 = 1-4+1 = -2$$

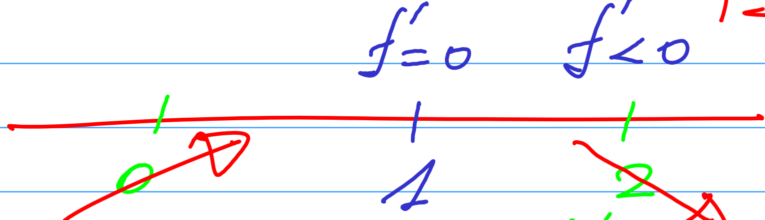
$$f'(-1) = 2(-1)+4 = -2+4 = 2$$

$$y = f(-1) + f'(-1)(x+1) = \boxed{-2+2(x+1)}$$

(197) (69°) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones y di si tienen máximo o mínimo.

a) $y=-3x^2+6x \Rightarrow y' = -6x+6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-6}{-6}$

$$\boxed{x=1}$$



$f'(0) = 6 > 0$ $\qquad$ $f'(2) = -12+6 = -6 < 0$

máximo

f es creciente en: $(-\infty, 1)$

f es decreciente en: $(1, +\infty)$

Tiene un máximo para $x = 1$

b) $y = 2x^2 - 8x + 7 \Rightarrow y' = 4x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{4}$

$\boxed{x = 2}$

$f' < 0$	$f' = 0$	$f' > 0$
1	2	3

mínimo

f es creciente en: $(2, +\infty)$

f es decreciente en: $(-\infty, 2)$

mínimo en $x = 2 \Rightarrow y = f(2) = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 7$

$(2, -1)$

$y = 8 - 16 + 7 = -1$