13/10/09

Pag 68 (18)

b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) 2^a + 2 \cdot 1^a$

$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -1^a \\ 2^a : 4 \end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/4 \end{array}\right)$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) 3^a - 2^a \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) 1^a - 3^a$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$

(69) 22°) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow I \cdot B = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = B$

$A^{-1} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} 1^a - 2 \cdot 2^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -1^a/3 \\ -2^a/3 \end{array}$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{array}\right)$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

$$B=\begin{pmatrix}-1/3 & 2/3\\ 2/3 & -1/3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

(59) 7º Encuentra dos matrices X e Y que cumplan

$$\begin{cases}2X-3Y=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 4 & 2\end{pmatrix}\\ -2\left[X-Y=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 6\end{pmatrix}\right]\end{cases}\quad -2X+2Y=-2\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 6\end{pmatrix}$$

$$-Y=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 4 & 2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 6\end{pmatrix}$$

$$Y=2\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 5\\ 4 & 2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-3 & -5\\ 2 & 10\end{pmatrix}}$$

$$X=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & -5\\ 2 & 10\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-4 & -5\\ 5 & 16\end{pmatrix}}$$

(68) 14ºs Halla A, B para que

$$\begin{cases}2A+3B=\begin{pmatrix}8 & 4 & 7\\ 18 & 11 & -6\\ 8 & 3 & 13\end{pmatrix}\\ -A+5B=\begin{pmatrix}9 & -2 & 16\\ 17 & 1 & -10\\ 9 & 5 & 13\end{pmatrix}\end{cases}\quad 2\cdot 2^a+1^a$$

14/10/09

$$13B=\begin{pmatrix}8 & 4 & 7\\ 18 & 11 & -6\\ 8 & 3 & 13\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}9 & -2 & 16\\ 17 & 1 & -10\\ 9 & 5 & 13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26 & 0 & 39\\ 52 & 13 & -26\\ 26 & 13 & 39\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}2&0&3\\4&1&-2\\2&1&3\end{pmatrix}\quad A=5B-\begin{pmatrix}9&-2&16\\17&1&-10\\9&5&13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&4&0\\1&0&2\end{pmatrix}$$

(61) RANGO DE UNA MATRIZ

Se llama rango de una matriz al número de filas que son linealmente independientes (L.I.). Linealmente independiente quiere decir que ninguna de ellas es combinación lineal de las demás

rango de A = ran(A)

Para calcular el rango de una matriz escalonamos por Gauss, como si se tratara de los coeficientes de un sistema de ecuaciones. Al excluir las filas con ceros o proporcionales, quedará un número de ecuaciones que coincide con las que son linealmente independientes, que coinciden con el rango

(62) 1º Calcula el rango de las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&4&-1\\-1&3&2\\2&2&0\end{pmatrix}\begin{array}{l}1^a\\2^a+2\cdot1^a\\3^a\end{array}\begin{pmatrix}1&4&-1\\1&11&0\\2&2&0\end{pmatrix}\begin{array}{l}1^a\\2^a\\3^a-2\cdot2^a\end{array}\begin{pmatrix}1&4&-1\\1&11&0\\0&-20&0\end{pmatrix}$$

$$ran(A)=3$$

$$B=\begin{pmatrix}1&3&-1\\2&-1&5\\1&10&-8\end{pmatrix}\begin{array}{l}1^a\\2^a-2\cdot1^a\\3^a-1^a\end{array}\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&-7&7\\\cancel{0}&\cancel{7}&\cancel{-7}\end{pmatrix}\quad ran(B)=2$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & -3\\ -1 & 3 & 1 & 4\\ 2 & 1 & 5 & -1\end{pmatrix}\begin{array}{l}1^a\\ 2^a+1^a\\ 3^a+2\cdot 2^a\end{array}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 7 & 7 & 7\end{pmatrix}\ \operatorname{ran}(C)=2$$

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 8 & 7 & 9 & 4\end{pmatrix}\begin{array}{l}1^a\\ 2^a\\ 3^a+1^a\\ 4^a-4\cdot 2^a\end{array}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 11 & 5 & -4\end{pmatrix}\begin{array}{l}1^a\\ 2^a\\ 2\cdot 3^a-2^a\\ 4^a\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 11 & 5 & -4\\ 0 & 0 & 11 & 5 & -4\end{pmatrix}\quad \operatorname{ran}(D)=3$$

TEOREMA: En una matriz el número de filas L.I. coincide con el de columnas. Por ello el rango de una matriz es el número de filas o de columnas L.I.

(69) 20ºs CASA.

21ºs Comprueba que $A^2=2A-I$ siendo

$$A=\begin{pmatrix}5 & -4 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ -4 & 4 & -1\end{pmatrix}$$

Utiliza esa igualdad para calcular A^4

15/10/09

$$A^2=\begin{pmatrix}9 & -8 & 4\\ 4 & -3 & 2\\ -8 & 8 & -3\end{pmatrix}=2A-I$$

$$A^4 = 2A^2 - I = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

(69) 3º)

$\text{ran}(A) = 3$ $\qquad \text{ran}(C) = 2$

$\text{ran}(B) = 2$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 2^a \\ 4^a - 3^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ran}(D) = 4$$

Determinante de una matriz

(74) Determinante de orden dos

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

El determinante de A se escribe:

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} a_{12}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } |A| \neq 0 \\ \text{ran}(A) = 2 \end{array}}$$

(75) 1º Calcula el valor de estos determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 4 \cdot 1 = 21 - 4 = 17$

CASA. $\qquad \text{ran}(a) = 2$

16/10/09

b) $\begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 3 & 33 \end{vmatrix} = 33 - 33 = 0$ $\quad$ $ran(b) = 1$

c) $\begin{vmatrix} 373 & 141 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\quad$ $ran(c) = 1$

d) $\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$ $\quad$ $ran(d) = 2$

(63) 1° Expresa en forma matricial los sistemas:

b) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 2x - y \\ x - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{I} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/3 - 11/3 \\ 7/3 - 22/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/3 \\ -15/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} x = 1 \\ y = -5 \end{matrix}$$

a) $$\begin{cases} x + z = 10 \\ 2x + 3y = 17 \\ 3x + 4y + z = 32 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ 32 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 2 & -3/2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1/2 & -2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ 32 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 15 + 34 - 48 \\ -10 - 17 + 32 \\ -5 - 34 + 48 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}}$$

c) CASA

(76) Determinante de ordem três.
Regra de Sarrus

1° a)

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 5.3.8 + 0.6.4 + 9.6.1$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -(9.3.4 + 8.0.1 + 6.6.5)$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 120 + 0 + 54 - (108 + 0 + 180) = -114$$

b) $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 6 + 0 - (0 + 0 + 0) = 3$

(76) 2° CASA.