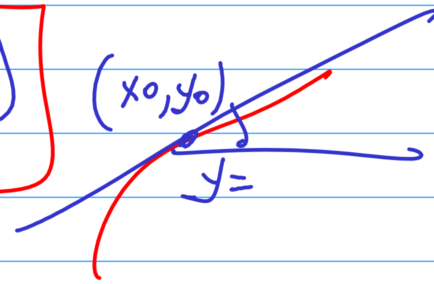
19/01/10

(166) Aplicaciones de la derivada: 7

Recta tangente a una curva en un punto

Si $f(x)$ es derivable en x_0, la ecuación de la tangente a la gráfica en x_0 es:

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$



Ejercicios

(168) 1° Halla las tangentes a la curva

$$y = \frac{5x^3 + 7x^2 - 16x}{x - 2}$$

en los puntos de abscisa 0, 1, 3

$$y' = \frac{(15x^2 + 14x - 16)(x - 2) - (5x^3 + 7x^2 - 16x)}{(x-2)^2} =$$

$$y' = \frac{10x^3 - 23x^2 - 28x + 32}{(x-2)^2}$$

(*) tangente en $x_0 = 0 \rightarrow y(0) = \dfrac{5 \cdot 0^3 + 7 \cdot 0^2 - 16 \cdot 0}{0 - 2} = 0$

$y'(0) = \dfrac{32}{4} = 8$ $\qquad y = 0 + 8(x - 0) \rightarrow \boxed{y = 8x}$

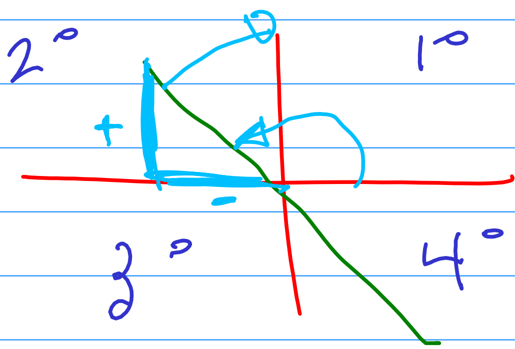
(*) tangente en $x_0 = 1$ → $y(1) = \frac{5+7-16}{-1} = 4$

$$y'(1) = \frac{10-23-28+32}{1} = -9$$

tangente: $y = 4 - 9(x-1)$ → $\boxed{y = -9x + 13}$

(*) Tangente en $x_0 = 3$ → $\boxed{y = 11x + 117}$ CASA

(168) 2° Halla las ecuaciones de las tangentes a la curva $y = x^3 - 4x + 3$ que son paralelas a la bisectriz de los cuadrantes segundo y cuarto.



$f'(x) = -1$ $\boxed{y = x^3 - 4x + 3}$

$y' = 3x^2 - 4 = -1$ → $3x^2 = 3$; $x^2 = 1$

$\boxed{x = \pm 1}$

$\boxed{x = 1}$ $f(1) = 1^3 - 4\cdot 1 + 3 = 0$

$f'(1) = 3 - 4 = -1$

$y = 0 - 1(x-1)$

$\boxed{y = -x + 1}$

$\boxed{x=-1}$ $\quad f(-1) = -1+4+3 = 6$

$$f'(-1) = 3-4 = -1$$

$$y = 6-1(x+1) = \boxed{-x+5}$$

(180) 2°S Escribe la ecuación de la tangente a la curva $y=x^2+4x+1$, que es paralela a la recta $\underline{4x-2y+5=0}$

$ax+by+c=0$ — forma implícita $\qquad$ $y=mx+n$ — forma explícita

$+2y = +4x+5$; $\quad y = 2x+\frac{5}{2}$; $\quad m=2$

$f'(x) = (x^2+4x+1)' = 2x+4 = 2$; $\quad \boxed{x=-1}$

tangente para $\boxed{x=-1}$

$f(-1) = 1-4+1 = -2$

$\boxed{f'(-1) = 2}$

$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

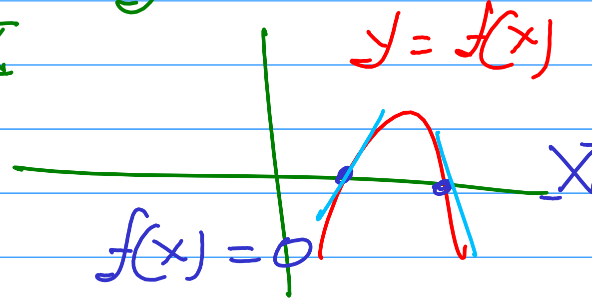
$y = -2+2(x+1)$

$\boxed{y = 2x}$

(180) 4°J Escribe las ecuaciones de las tangentes a la función $y=4x-x^2$ en los puntos de corte con X

Corte con X de $f(x)$

$f(x) = 0$



$\boxed{4x - x^2 = 0}$; $x(4-x) = 0 \to x = 0$, $x = 4$

$f'(x) = -2x + 4$

$\boxed{x = 0}$ $f(0) = 0$, $f'(0) = 4$; $y = 0 + 4(x - 0)$; $\boxed{y = 4x}$

$\boxed{x = 4}$ $f(4) = 0$, $f'(4) = -4$; $y = 0 - 4(x - 4)$; $\boxed{y = -4x + 16}$

21/01/10

(181) (20° g) Determina la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = 2x - 3$ en el punto $A(2, 1)$ y pasa por el punto $B(5, -2)$

$f'(x) = 2ax + b$; $f'(2) = \underbrace{4a + b = 2}$

$f(5) = 25a + 5b + c = -2$

$f(2) = 4a + 2b + c = 1$

1ª − 2ª
$$\begin{cases} 21a + 3b = -3 \\ 4a + b = 2 \end{cases}$$

$\boxed{b = 6}$

$\boxed{c = -7}$

1ª − 3·2ª $\to$ $9a = -9 \to \boxed{a = -1}$

La parábola es: $\boxed{y = -x^2 + 6x - 7}$

(169) DERIVADA y CRECIMIENTO

$f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ es creciente en x_0

$f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente en x_0

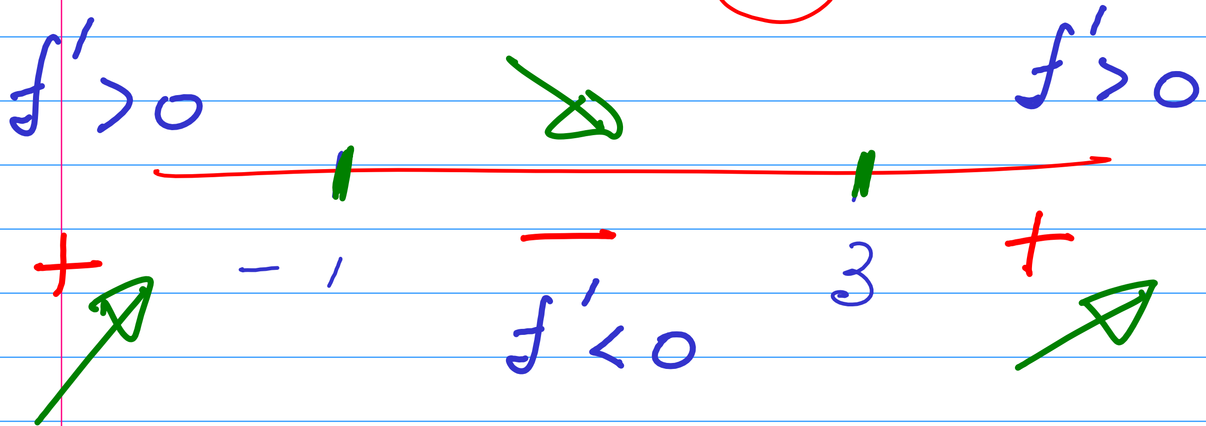
Ejercicio

1º Dada la función $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$

Averigua dónde es creciente y decreciente

$$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \;; \quad x = \frac{6 \pm \sqrt{36+108}}{6}$$

$$x = \frac{6 \pm 12}{6} \Rightarrow 3 \;;\; -1$$



$f(x)$ es decreciente en: $(-1, 3)$

$f(x)$ es creciente en: $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

(180) 9° Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de:

a) $y=\dfrac{1}{x^2-4}$ $y'=\dfrac{-2x}{(x^2-4)^2}=0$; $x=0$

Dom $f=\mathbb{R}-\{2,-2\}$

$f'>0$ $f'>0$ $f'<0$ $f'<0$

-2 0 2

$+$ $+$ $-$ $-$

$f'=0$

máximo

$f(x)$ es creciente en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$

$f(x)$ es decreciente en $(0,2)\cup(2,+\infty)$

b) $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$ No está definida en $\boxed{x=-1}$

$$f'(x)=\frac{2(x+1)-(2x-3)}{(x+1)^2}=\frac{5}{(x+1)^2}>0$$

$+$ -1 $+$

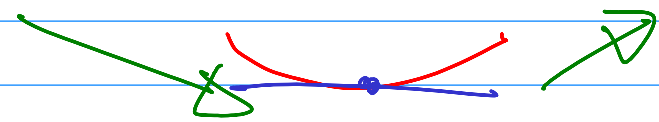
$f(x)$ es creciente en $\mathbb{R} - \{-1\}$

c) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$; $y' = \dfrac{2x(x^2+1) - 2x^3}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

$y' = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

$-$ $\quad f' = 0 \quad$ $+$

$f' < 0 \quad 0 \quad f' > 0$



d) $y = \dfrac{x^2-1}{x}$; $y' = \dfrac{2x^2 - (x^2-1)}{x^2} = \dfrac{x^2+1}{x^2} = 0$

En $x=0$ no está definida

ningún x lo anula

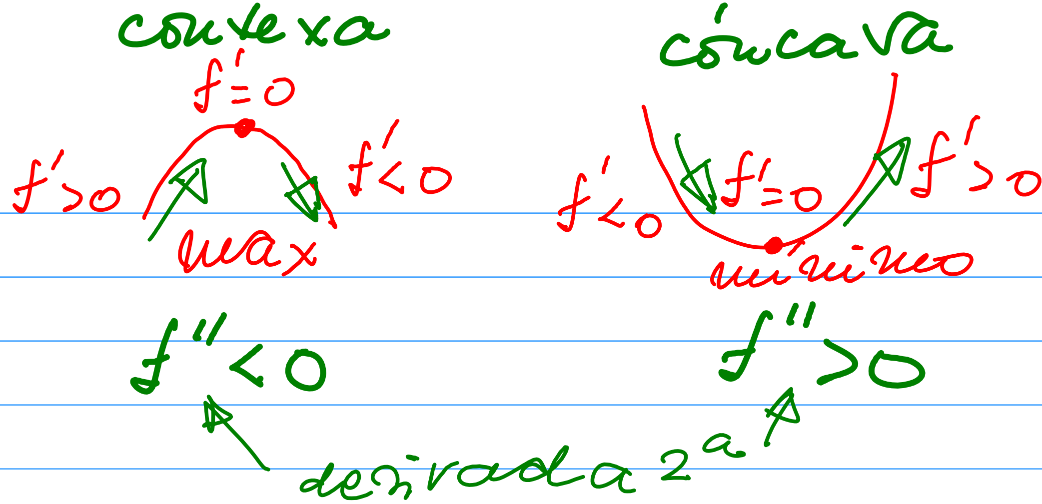
$+ \quad\quad + $

0

$f(x)$ es creciente en $\mathbb{R} - \{0\}$

Máximos y mínimos relativos

Son puntos en los que la función pasa de ser creciente a decreciente (máximo) o decreciente a creciente (mínimo)



$f'(x_0)=0 \wedge f''(x_0)<0 \Rightarrow$ máximo en x_0

$f'(x_0)=0 \wedge f''(x_0)>0 \Rightarrow$ mínimo en x_0

$f''(x_0)>0$ f es cóncava en x_0
$f''(x_0)<0$ f es convexa en x_0

curvatura de f

(173) 1º Estudia la curvatura de la función $y=3x^4-8x^3+5$

$y'=12x^3-24x^2$ // $y''=36x^2-48x$

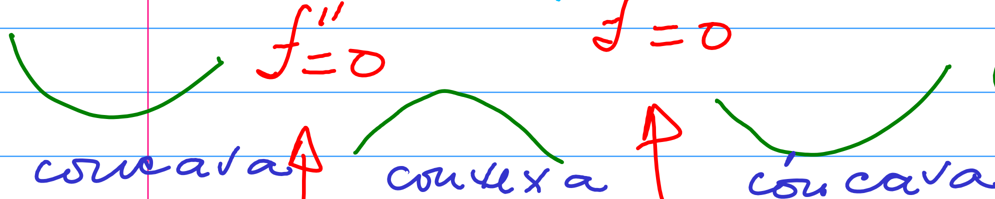
$f''(x)=36x^2-48x=0$; $12x(3x-4)=0$

$x=0$
$x=4/3$

$f''>0$ $f''<0$ $f''>0$

+   0   −   4/3   +

$f''=0$ $f''=0$



f(x) cóncava en: $(-\infty,0)\cup(4/3,+\infty)$

f(x) convexa: $(0,4/3)$

Punto de inflexión si la función pasa de cóncava a convexa o a la inversa.

$$f''(x_0)=0 \wedge f'''(x_0)\neq 0 \rightarrow \text{Inflexión en } x_0$$

(173) 2º CASA

26/01/10 Estudia la curvatura de

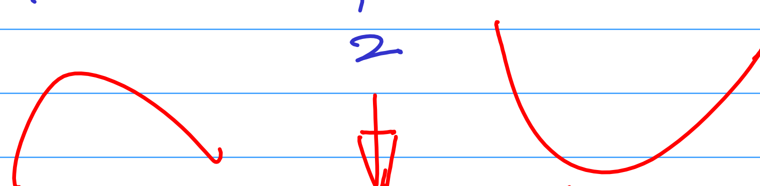
$$y = x^3-6x^2+9x$$

$$f'(x)=3x^2-12x+9 \quad ; \quad f''(x)=6x-12$$

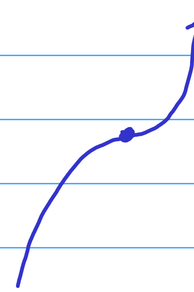
$$f''(x)=0 \; ; \; 6x-12=0 \; ; \; \boxed{x=2}$$

$f''<0$ $f''=0$ $f''>0$

2



convexa   punto de inflexión   cóncava



Sol: $f(x)$ es convexa en $(-\infty, 2)$

$f(x)$ es cóncava en $(2, +\infty)$

f(x) tiene un punto de inflexión para $x = 2$

(181) 23's $f(x) = x^2 + ax + b$

Tiene mínimo en $x = 2$

Pasa por $(2,2)$

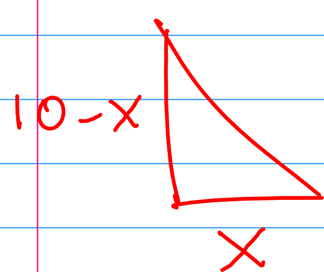
$f'(x) = 2x + a$ || $f'(2) = 2\cdot 2 + a = 0$

$\boxed{a = -4}$

$f(2) = 2^2 - 4\cdot 2 + b = 2$; $\boxed{b = 6}$

24's CASA

(175) 2° De todos los triángulos cuyos catetos suman 10, halla el que tenga área máxima. $A'(x) = \frac{1}{2}(10-2x)$



$$A(x) = \frac{x(10-x)}{2} = \frac{10x - x^2}{2}$$

$$A'(x) = 5 - x = 0; \quad x = 5$$

27/01/10 $A''(x) = -1$ (máximo)

(181) 24°s Halla p y q para que $y = x^2 + px + q$ contenga al punto $(-2, 1)$, tenga un mínimo en $x = -3$

$y' = 2x + p$; $f'(-3) = 2(-3) + p = 0$

$$\boxed{p = 6}$$

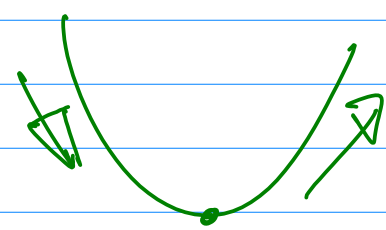
$f(-2) = (-2)^2 + 6(-2) + q = 1$

$4 - 12 + q = 1$; $\boxed{q = 9}$

$$\boxed{y = x^2 + 6x + 9}$$

(175) 1° Halla el nº positivo cuya suma con 25 veces su inverso sea mínima.

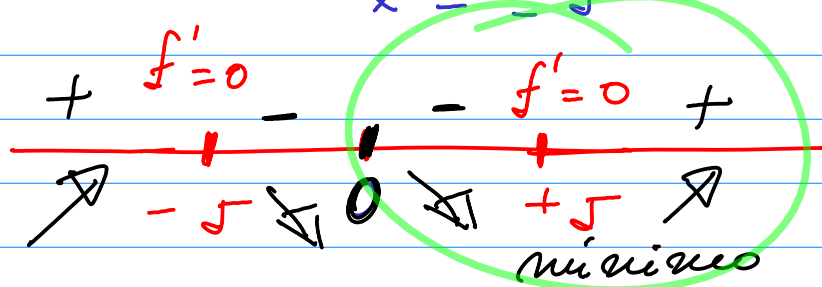
$f(x) = x + \dfrac{25}{x}$



$$\boxed{f'(x) = 1 - \frac{25}{x^2} = 0}$$; $x^2 - 25 = 0$

$x = \pm 5$

$\boxed{x = 5}$



$$f''(x) = 0 - \frac{25(-2x)}{x^4} = \frac{50}{x^3}$$

$$f''(5) = \frac{50}{5^3} > 0 \quad (\text{mínimo})$$