

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k :

$$\begin{cases} x + ky + z = 1 \\ 2y + kz = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

- a) Discútase el sistema para los diferentes valores de k .
b) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.
c) Resuélvase el sistema para $k = 3$.

a) Como hay menores de dimensión 2 distintos de cero, que no dependen de k , el rango de A es al menos de 2. Hacemos cero el determinante de A para ver qué valores de k lo anulan.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & 2 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + k^2 - 2 - k = k^2 - k = 0 \rightarrow k = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \rightarrow \text{rango}(A) = 2$$

Discusión:

Si $k \neq 0$, $k \neq 1$ $\text{rango}(A) = 3 = \text{rango}(A')$: El sistema es **compatible determinado**

Si $k = 0$ $\text{rango}(A) = 2$ tenemos que ver el $\text{rango}(A')$. Como sobra una columna la sustituimos por los términos independientes y hallamos su determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 - 2 \neq 0 \quad \text{El rango}(A') = 3. \text{ El sistema es } \mathbf{\text{incompatible}}$$

Si $k = 1$ $\text{rango}(A) = 2$ tenemos que ver el $\text{rango}(A')$. Como sobra una columna la sustituimos por los términos independientes y hallamos su determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{dos filas iguales}) \quad \text{El rango}(A') = 2. \text{ El sistema es } \mathbf{\text{compatible indeterminado:}}$$

b) Para $k = 1$ el sistema es compatible indeterminado, es decir tiene infinitas soluciones. Suprimimos la última fila y pasamos z al segundo miembro, el sistema queda:

$$\begin{cases} x + y = 1 - z \\ 2y = 2 - z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - z - \frac{2 - z}{2} = -z \\ y = \frac{2 - z}{2} \end{cases} \rightarrow \text{Soluciones: } \begin{cases} z = \lambda \\ x = -\lambda \\ y = \frac{2 - \lambda}{2} \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Para $k = 3$ estamos en el primer caso, el sistema es compatibles determinado. Por Cramer:

$$|A| = k^2 - k = 6$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{2+2+9-2-3-6}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{6} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{2+6-2-2}{6} = \frac{2}{3}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la curva de ecuación cartesiana:

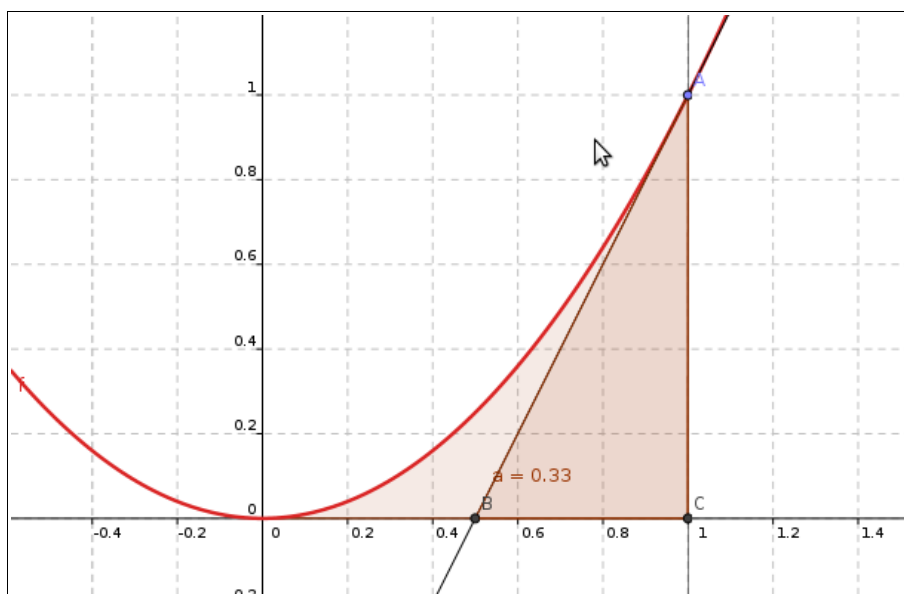
$$y = x^2.$$

a) Calcúlense las coordenadas del punto en el que la recta tangente a la curva propuesta es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

b) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por las gráficas de la curva propuesta, la recta tangente a dicha curva en el punto $P(1, 1)$ y el eje OX .

a) Si la tangente a la curva es paralela a la bisectriz del primer cuadrante la derivada de la curva debe ser $y'=1$. Como $f'(x)=2x=1 \rightarrow x=1/2=0,5$. Para $x=1/2$ hay que hallar la ecuación de la tangente: $f(1/2)=1/4$; $f'(1/2)=1$ (lógico ¿no?). La ecuación es: $y=1/4+1(x-1/2)=x-1/4$

b) Este apartado requiere una representación clara de la curva y la tangente en $P(1,1)$ para saber cuál es el área que se pide. En la imagen podemos ver que es la zona más clara, es decir el área debajo de la curva y el eje X (integral entre $[0,1]$) menos el área bajo la tangente y el eje X (integral entre $[0.5,1]$). Para saber esos puntos de cortes hay que hallar la ecuación de la tangente en $x=1$: $f(1)=1$; $f'(1)=2*1=2 \rightarrow y=1+2(x-1)=2x-1 \rightarrow$ Corte con X : $2x-1=0 \rightarrow x=0.5$



$$\text{Área bajo } x^2 \rightarrow G(x) = \int x^2 = \frac{x^3}{3}; G(0)=0; G(1)=1/3 \rightarrow G(1)-G(0)=1/3u^2$$

$$\text{Área bajo } y=2x-1 \rightarrow \text{área triángulo} = 0.5 * 1/2 = 0.25u^2. \text{ También: } G(x) = x^2 - x;$$

$$G(0.5) = -0.25; G(1) = 1 - 1 = 0; G(1) - G(0.5) = 0.25u^2$$

$$\text{Área pedida} = (1/3 - 1/4)u^2 = 1/12u^2 \approx 0.083u^2$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Según cierto estudio, el 40% de los hogares europeos tiene contratado el acceso a Internet, el 33% tiene contratada la televisión por cable, y el 20% dispone de ambos servicios. Se selecciona al azar un hogar europeo.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que sólo tenga contratada la televisión por cable?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?

I=acceso a Internet; C=acceso por cable $P(I)=0.4$; $P(C)=0.33$; $P(I \cap C)=0.2$

a) $P(C-I)=P(C)-P(I \cap C)=0.33-0.2=0.13$

b) $P(I' \cap C')=1-P(I \cup C)=1-[P(I)+P(C)-P(I \cap C)]=1-(0.4+0.33-0.2)=1-0.53=0.47$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se supone que la duración de una bombilla fabricada por una cierta empresa se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 900 horas y desviación típica 80 horas. La empresa vende 1000 lotes de 100 bombillas cada uno. ¿En cuantos lotes puede esperarse que la duración media de las bombillas que componen el lote sobrepase 910 horas?

La duración de las bombillas sigue $N(900;80)$, cada muestra de 100 bombillas tiene una duración media de: $N\left(900; \frac{80}{\sqrt{100}}\right) = N(900; 8)$ La probabilidad de que la duración media de las bombillas de un lote sea mayor de 910 horas es:

$$P(\bar{x} > 910) = P\left(z > \frac{910-900}{8}\right) = P(z > 1.25) = 1 - P(z \leq 1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$$

El número de lotes en los que la duración media puede ser mayor que 910 horas es:

$$1000 * 0.1056 = \mathbf{105} \text{ lotes}$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Una empresa de instalaciones dispone de 195 kg de cobre, 20 kg de titanio y 14 kg de aluminio. Para fabricar 100 metros de cable de tipo A se necesitan 10 kg de cobre, 2 kg de titanio y 1 kg de aluminio. Para fabricar 100 metros de cable de tipo B se necesitan 15 kg de cobre, 1 kg de titanio y 1 kg de aluminio. El beneficio que obtiene la empresa por cada 100 metros de cable de tipo A fabricados es igual a 1500 euros, y por cada 100 metros de cable de tipo B es igual a 1000 euros. Calcúlense los metros de cable de cada tipo que han de fabricarse para maximizar el beneficio y determínese dicho beneficio máximo.

$$\text{Cu} \rightarrow 195 \text{ kg} \quad \text{Ti} \rightarrow 20 \text{ kg} \quad \text{Al} \rightarrow 14 \text{ kg}$$

$$(x) \text{ 100m cable tipo A} \rightarrow 10\text{kg Cu} \quad 2\text{kg Ti} \quad 1\text{kg Al} \rightarrow 1500\text{€}$$

$$(y) \text{ 100m cable tipo B} \rightarrow 15\text{kg Cu} \quad 1\text{kg Ti} \quad 1\text{kg Al} \rightarrow 1000\text{€}$$

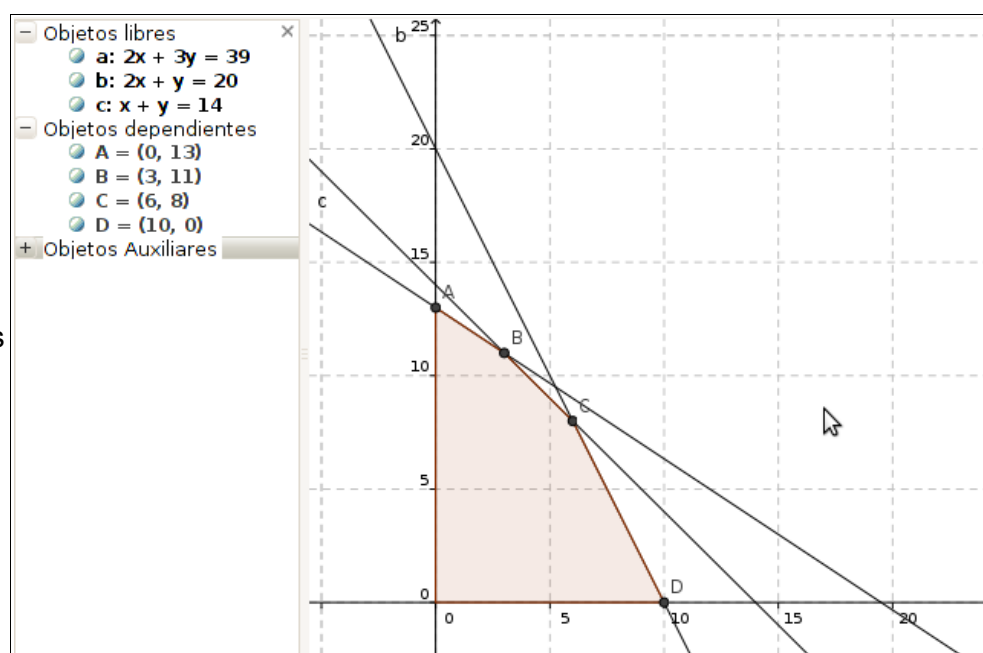
La función beneficio que hay que maximizar es $f(x,y)=1500x+1000y$, siendo x e y los centenares de metros de A y B respectivamente.

Las restricciones son:

$$\begin{cases} 10x + 15y \leq 195 \\ 2x + y \leq 20 \\ x + y \leq 14 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Los valores de la función objetivo en los vértices de la región factible son:

$$\begin{aligned} f(A) &= 13000 \\ f(B) &= 15500 \\ \mathbf{f(C)} &= \mathbf{17000} \\ f(D) &= 15000 \end{aligned}$$



El valor máximo se alcanza en $C(6,8)$, es

decir, será necesario fabricar **600m** de cable tipo **A** y **800m** de cable tipo **B** para obtener el máximo beneficio de **17000€**

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c \quad ; \quad a, b, c \in \mathbf{R}.$$

- ¿Qué valores deben tomar a , b y c para que la gráfica de f pase por el punto $O(0,0)$ y además tenga un máximo relativo en el punto $P(1,2)$?
- Para $a = 1$, $b = -2$, $c = 0$, determínense los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas.
- Para $a = 1$, $b = -2$, $c = 0$, calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX .

Pasa por $O(0,0) \rightarrow f(0)=c=0 \rightarrow c=0$
 Máximo en $P(1,2) \rightarrow f(1)=2; f'(1)=0 \rightarrow a+b=2$

$$Pasa por O(0,0) \rightarrow f(0)=c=0; \text{ Máximo en } P(1,2) \rightarrow \begin{cases} f(1)=a+b=2 \\ f'(1)=3a1^2+2b1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ 3a+2b=0 \end{cases}$$

$$(2^a - 2 \cdot 1^a) 2a = -4; a = -2; b = 4$$

b) La función es: $f(x)=x^3-2x^2=0$ Los cortes con X e Y son: $x^2(x-2)=0 \rightarrow x=0; x=2$

c) Como se trata de la misma función ya tenemos los puntos de corte con eje X y el recinto de integración: $[0,2]$

$$G(x) = \int (x^3 - 2x^2) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} \rightarrow G(0)=0; G(2)=4 - \frac{16}{3} = \frac{-4}{3} \quad \text{Área} = \frac{4}{3} u^2$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que:

$$P(A) = \frac{3}{4} ; \quad P(B) = \frac{1}{2} ; \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{20}.$$

Calcúlese:

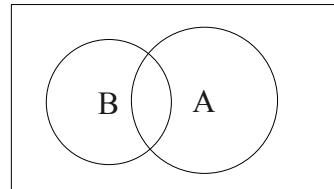
- a) $P(A \cup B)$ b) $P(A \cap B)$
 c) $P(\bar{A}|B)$ d) $P(\bar{B}|A)$.

a) $P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = \frac{1}{20} \rightarrow P(A \cup B) = \frac{19}{20}$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{19}{20} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{19}{20} = 0,3$

c) $P(A' | B) = \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,5 - 0,3}{0,5} = 0,4$

d) $P(B' | A) = \frac{P(B' \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,75 - 0,3}{0,75} = 0,6$



Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

La temperatura corporal de una especie de aves se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media $40,5^\circ C$ y desviación típica $4,9^\circ C$. Se elige una muestra aleatoria simple de 100 aves de esa especie. Sea \bar{X} la media muestral de las temperaturas observadas.

a) ¿Cuáles son la media y la varianza de \bar{X} ?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura media de dicha muestra esté comprendida entre $39,9^\circ C$ y $41,1^\circ C$?

a) La temperatura de las aves se distribuye $N(40,5;4,9)$, una muestra de 100 aves tiene una temperatura media \bar{X} que se distribuye: $N\left(40,5; \frac{4,9}{\sqrt{100}}\right) = N(40,5; 0,49)$

b) La probabilidad de que la temperatura media de dicha muestra esté entre $39,9^\circ$ y $41,1^\circ$ es:

$$P(39,9 < \bar{x} < 41,1) = P\left(\frac{39,9 - 40,5}{0,49} < z < \frac{41,1 - 40,5}{0,49}\right) = P(-1,225 < z < 1,225) = 0,7776$$