SELECTIVIDAD MADRID 2008-2009. JUNIO. Opción A

1º) (3p) Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro k:

$$\begin{cases} x+y+kz=4 \\ 2x-y+2z=5 \\ -x+3y-z=0 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k
b) Resuélvase el sistema en el caso de que tenga infinitas soluciones
c) Resuélvase el sistema para k=0

a) Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes, A, y la ampliada A':

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1+6k-2-k-6+2 = 5k-5 = 0$$

$k=1 \rightarrow \text{ran } A = 2$

Si k es distinto de 1 el ran A = 3 y por tanto también el de A' (sólo 3 filas). Como hay un menor de orden 2 distinto de cero para cualquier valor de k, el rango de A es, al menos, 2. Si k=1 el rango de A=2. Habrá que ver el rango de la matriz ampliada A': si sigue siendo el mismo se trataría de un Sistema Compatible Indeterminado y si es mayor sería un Sistema Incompatible.

* $\boxed{k \neq 1} \rightarrow \text{ran } A = \text{ran } A' = 3$

Sistema compatible Determinado

** $\boxed{k=1} \rightarrow \text{ran } A = 2$, veamos ran A'

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 24-5-4-15 = 0 \rightarrow$$

ran A' = 2 < nº incógnitas

Sistema Compatible Indeterminado

b) El sistema tiene infinitas soluciones para k=1 ya que es compatible indeterminado. Por tanto podemos prescindir de una de las ecuaciones y convertiremos en parámetro una de las incógnitas. El sistema queda entonces:

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ -x+3y-z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=4-z \\ -x+3y=z \end{cases}$$

$$4y=4 \rightarrow y=1$$

$x=4-z-y=3-z$. Si hacemos $z=\lambda$

Las soluciones son:

$x=3-\lambda$; $y=1$; $z=\lambda$

c) Para k=0 (distinto de 1) el sistema es Compatible Determinado. Lo pode- resolver por Cramer o Gauss. Como no usamos Gauss para discutir, utilizaremos Cramer:

$|A|=5k-5$ En este caso $k=0 \rightarrow |A|=-5$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{4-24+5}{-5}=\frac{-15}{-5}=3$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{-5-8+8}{-5}=1$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{24-5-4-15}{-5}=0$$

2º) (3p) Se considera la función real de variable real definida por: $f(x)=(x^2-1)^2$

a) Determínense los extremos relativos de f.

b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x=3.

c) Calcúlese el área del recinto plano limitado por la gráfica de f y el eje X.

a) Extremos relativos o locales de una función son los máximos y mínimos. Estudiamos las soluciones de f'(x)=0 y hallamos el signo de la derivada en cada intervalo.

$$f'(x)=2\cdot 2x\,(x^2-1)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} 4x=0 \;\Rightarrow\; x=0 \\ x^2-1=0 \;\Rightarrow\; x=\pm 1 \end{cases}$$

$f'<0$	-1	$f'>0$	0	$f'<0$	1	$f'>0$
	mínimo $(-1,0)$		máximo $(0,1)$		mínimo $(1,0)$	

b) La ecuación de la tangente en x=3 es y=f(3)+f'(3)(x-3): f(3)=64
f'(3)=12*8=96 La ecuación de la tangente es:

y=64+96(x-3)=96x-224

c) Para hallar el área comprendida entre la curva y el eje X buscamos los cortes de la gráfica con el eje X e integramos entre ellos teniendo en cuenta que el área ha de ser positiva.

I) Cortes de $f(x)$ con eje X: $(x^2-1)^2=0 \Rightarrow x= \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$

Sólo un recinto de integración: $[-1,1]$

II) Primitiva: $G(x)=\int (x^2-1)^2=\int (x^4-2x^2+1)=$

$$=\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x$$

III) $G(-1)=-\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-1=\frac{-3+10-15}{15}=-\frac{8}{15}$

$G(1)=\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1=\frac{8}{15}$

IV) $G(1)-G(-1)=\frac{8}{15}-\left(-\frac{8}{15}\right)=\frac{16}{15}$

V) Área $=\frac{16}{15}$ u

3º) (2p) Se consideran tres sucesos A, B y C de un experimento aleatorio, tales que:

$$P(A)=\frac{1}{2};\ P(B)=\frac{1}{3};\ P(C)=\frac{1}{4};\ P(A\cup B\cup C)=\frac{2}{3}$$

$$P(A\cap B\cap C)=0;\ P(A/B)=P(C/A)=\frac{1}{2}$$

a) Calcúlese $P(C\cap B)$

b) Calcúlese $P(\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C})$

b) Sabemos que $\bar{A}\cup\bar{B}=\overline{A\cap B}$, veamos a qué es igual $\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}=(\bar{A}\cup\bar{B})\cup\bar{C}=$
$=(\overline{A\cap B})\cup\bar{C}=\overline{A\cap B\cap C}$. Entonces:

$$P(\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C})=P(\overline{A\cap B\cap C})=1-P(A\cap B\cap C)=1-0$$

a) $P(A)=\frac{1}{2};\ P(B)=\frac{1}{3};\ P(C)=\frac{1}{4}$

$P(A\cup B\cup C)=\frac{2}{3};\ P(A/B)=P(C/A)=\frac{1}{2}$

$P(A\cap B\cap C)=0$ Hallar $P(C\cap B)$

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{2}\ \ \Big\|\ \ P(C/A)=\frac{P(C\cap A)}{P(A)}=\frac{1}{2}$$

$$P(A\cap B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\qquad P(A\cap C)=P(C\cap A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$P(A\cup(B\cup C))=P(A)+P(B\cup C)-P(A\cap(B\cup C))=$$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(B\cap C)-P[(A\cap B)\cup(A\cap C)]$$

$$= P(A) + P(B) + P(C') - P(B\cap C') - [P(A\cap B) + P(A\cap C') -$$

$$- \underbrace{P((A\cap B)\cap(A\cap C'))}_{P(A\cap B\cap C')} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} - P(B\cap C') - \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-0\right) = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{P(B\cap C')} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{4}-\frac{2}{3} = \frac{6+4+3-2-3-8}{12} = 0$$

4º) (2p) Se supone que el gasto mensual dedicado al ocio por una familia de un determinado país se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 55 €. Se ha elegido una muestra aleatoria simple de 81 familias, obteniéndose un gasto medio de 320 €.

a) ¿Se puede asegurar que el valor absoluto del error de la estimación del gasto medio por familia mediante la media de la muestra es menor que 10 € con un grado de confianza del 95%? Razónese la respuesta.

b) ¿Cuál es el tamaño mínimo de la muestra que debe tomarse para poder asegurarlo?

a) Al hacer una estimación de la media de una población normal mediante una muestra de un determinado tamaño con una confianza dada el error máximo que se comete es:

$$E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ En este caso el error es:

$$E = 1'96\cdot\frac{55}{\sqrt{81}} = 11'98$$

En este caso por tanto no podemos asegurar que el error sea menor que 10€ ya que puede llegar a ser mayor que 11€

b) Para que podamos asegurar que el error de la estimación es inferior a 10€ será necesario un tamaño de la muestra mayor.

Si $E = 1'96\cdot\frac{55}{\sqrt{n}} = 10$; $\sqrt{n} = \frac{1'96\cdot 55}{10} = 10'78$

$n = 116'21$

Para que el error sea inferior a 10 el tamaño mínimo de la muestra ha de ser de 117 individuos