ELECITIVIDAD 2009. JUNIO. OpciónB

1º) (3p) Una refinería utiliza dos tipos de petróleo, A y B, que compra a un precio de 300 y 400 euros por tonelada, respectivamente. Por cada tonelada de tipo A que refina, obtiene 0,10 toneladas de gasolina y 0,35 de fuel-oil. Por cada tonelada de tipo B que refina, obtiene 0,05 toneladas de gasolina y 0,55 de fuel-oil. Para cubrir sus necesidades necesita obtener al menos 10 toneladas de gasolina y al menos 50 de fuel-oil. Por cuestiones de capacidad, no puede comprar más de 100 toneladas de cada tipo de petróleo. ¿Cuántas toneladas de petróleo de cada tipo debe comprar la refinería para cubrir sus necesidades a mínimo coste? Determinar dicho coste mínimo.

Toneladas	tipo petróleo	precio	gasolina	gas-oil
x	A	300	0,10	0,35
y	B	400	0,05	0,55

Función objetivo: f(x,y)=300x+400y

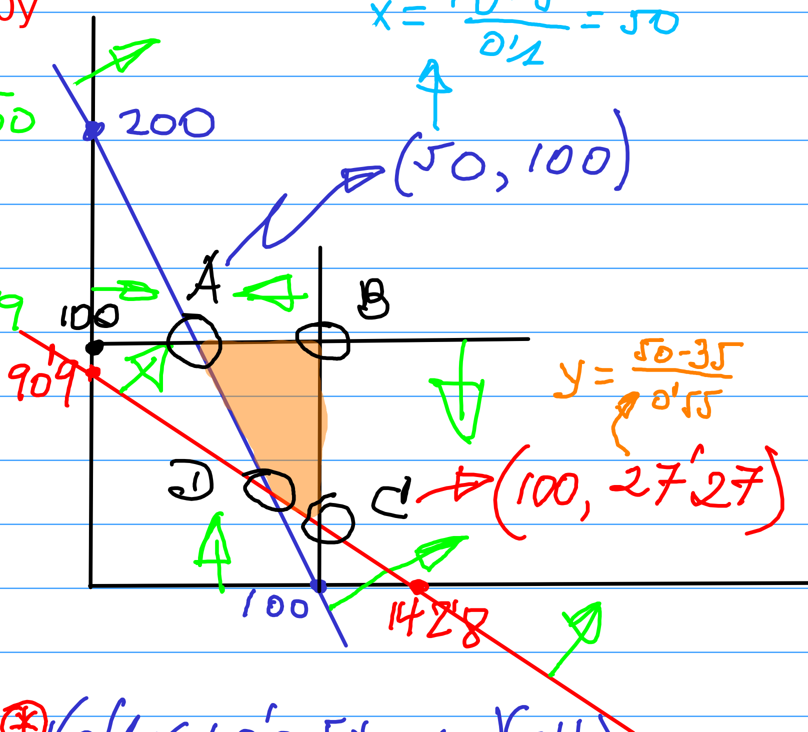
$$x = \frac{10-5}{0'1} = 50$$

RESTRICCIONES:

$$\begin{cases} 0'1x + 0'05y \geq 10 \\ 0'35x + 0'55y \geq 50 \\ 0 \leq x \leq 100 \\ 0 \leq y \leq 100 \end{cases}$$

x	y
0	200
100	0

x	y
0	90'9
148'2	0



$$y = \frac{50-35}{0'55}$$

$A = (50,100)$

$B = (100,100)$

$C = (100, 27'27)$

$D = (80,40)$

$$D = \begin{cases} (0'1x + 0'05y = 10)(-11) \\ 0'35x + 0'55y = 50 \end{cases}$$

$$-0'75x = -60 \rightarrow x = 80$$

$$8 + 0'05y = 10 \rightarrow y = 40$$

$f(A) = 57500$; $f(B) = 75000$; $f(C) = 45908$

$f(D) = 44000$

Hay que comprar 80 toneladas de A y 40 de B. El coste será de 44000€

2º) (3p) Se considera la función real de variable real definidad por:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-a}$$

a) Determínense las asíntotas de f, especificando los valores del parámetro a para los que f tiene una asíntota vertical, dos asíntotas verticales, o bien no tiene asíntotas verticales.

b) Para a=-1 calcúlense los valores reales de b para los que se cumple:

$$\int_0^b f(x)\,dx = 0$$

a) Las asíntotas verticales se dan para aquellos valores de x que anulan el denominador. Según los diferentes valores de a la ecuación $x^2-x-a=0$ tiene dos, una o ninguna solución.

En cuanto a las horizontales, las tiene al margen del parámetro a ya que cuando x tiende a infinito el límite de f es 0. Por tanto y=0 es asíntota horizontal en cualquier caso.

Si $x^2-x-a=0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$

* Si $1+4a<0 \Rightarrow a<-\frac{1}{4}$ no hay asíntota vertical

* Si $1+4a=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{4}$ habría una asíntota vertical para $x=\frac{1}{2}$

* Si $1+4a>0 \Rightarrow a>-\frac{1}{4}$ hay dos asíntotas en $x=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$; $x=\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$

Asíntota horizontal, de ecuación: $\boxed{y=0}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x-1}{x^2-x-a} = 0$$

Para cualquier valor de a

b) $\int_0^b \frac{2x-1}{x^2-x+1} \to G(x)=\ln(x^2-x+1)$

$G(0)=\ln 1=0$

$G(b)=\ln(b^2-b+1)$

$G(b)-G(a)=\ln(b^2-b+1)=0 \to$

$b^2-b+1=e^0=1 \to b^2-b=0$

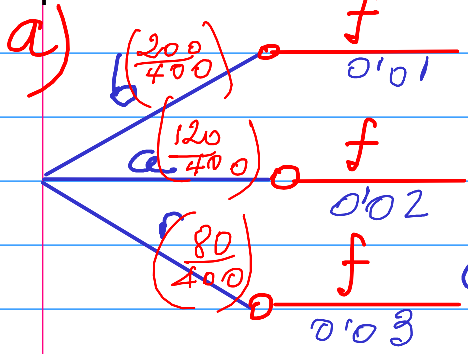
$b(b-1)=0$

$b=0$

$b=1$ Son los valores pedidos

3º) (2p) Para la construcción de un luminoso de feria se dispone de un contenedor con 200 bombillas blancas, 120 azules y 80 rojas. La probabilidad de que una bombilla blanca no funcione es 0,01, la de una azul 0,02 y si es roja 0,03. Se elige al azar una bombilla del contenedor.
a) Calcúlese la probabilidad de que la bombilla elegida no funcione.
b) Sabiendo que la bombilla elegida no funciona, qué probabilidad hay de que sea azul.

a)



$P(b\cap f)=\frac{5}{10}\cdot 0'01$

$P(a\cap f)=\frac{3}{10}\cdot 0'02$

$P(r\cap f)=\frac{2}{10}\cdot 0'03$

$\boxed{P(f)}=\frac{0'05+0'06+0'06}{10}=\boxed{0'017}$

b) $\boxed{P(a/f)}=\frac{P(a\cap f)}{P(f)}=\frac{0'06}{0'017}=\boxed{0'353}$

4º) (2p) Se supone que la cantidad recogida en litros por día en una estación meteorológica se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 2 litros. Se elige una muestra aleatoria simple y se obtienen las siguientes cantidades de agua recogidas cada día: 9,1; 4,9; 7,3; 2,8; 5,5; 6,0; 3,7; 8,6; 4,5; 7,6

a) Determínese un intervalo de confianza para la cantidad media de agua recogida cada día en dicha estación, con un grado de confianza del 95%.

b) Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para que al estimar la media del agua recogida cada día en la estación meteorológica mediante la media de dicha muestra, la diferencia en valor absoluto entre ambos valores sea inferior a un litro, con un grado de confianza del 98%

a) $\bar{X} = \frac{60}{10} = 6$ El intervalo para $1-\alpha = 0'95 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1'96$

$$\left(6 - 1'96 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}},\ 6 + 1'96 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}}\right) = (4'76,\ 7'24)$$

b) Para que $E < 1$ al $98\% \Rightarrow \alpha = 0'02$

$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0'01 = 0'99 \Rightarrow P(Z \leq K) = 0'99 \Rightarrow K = 2'33$

$98\% \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 2'33$

$$E = 2'33 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} = 1 \Rightarrow \sqrt{n} = 4'66 \Rightarrow n = 21'72$$

El tamaño mínimo de la muestra ha de ser de 22 mediciones