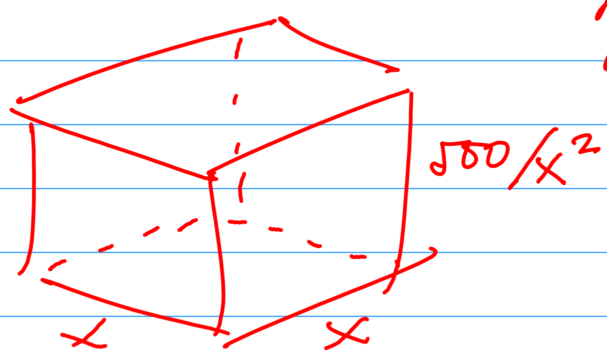
Selectividad 2007-2008 Septiembre

Opción A

1º) Hecho en clase (3P)

2º)(3P) Se desea fabricar un acuario con base cuadrada y sin tapa de 500 dm^3. La base y las paredes son de cristal ¿Cuáles deben ser las medidas para minimizar la superficie total de cristal empleado?

Si el lado de la base es x la altura l



$$l \cdot x^2 = 500$$

$$l = \frac{500}{x^2}$$

El área total es: $x^2 + 4 \cdot x \cdot \frac{500}{x^2} =$

$$A(x) = x^2 + \frac{2000}{x}$$

sólo una tapa

para minimizar derivamos:

$$A'(x) = 2x - \frac{2000}{x^2} = 0$$

$$2x = \frac{2000}{x^2} \;;\; x^3 = 1000 = 10^3 \rightarrow \boxed{x = 10}$$

La altura será de 5 dm de alto.

3º) (2P) Hecho en clase

4º) (2P) Se supone que la calificación en Matemáticas se distribuye normal con desviación típica 1'5 puntos. Se elige una muestra de tamaño 10 y se obtiene una suma de calificaciones de 59'5

a) Determínese un intervalo de confianza al 95% para la calificación media

b) ¿Qué tamaño ha de tener la muestra para que el error máximo de la estimación sea de 0'5 puntos, con un nivel de confianza del 95%

a) $\bar{x} = \frac{59'5}{10} = 5'95 \quad n = 10 \quad \sigma = 1'5 \quad 95\% \rightarrow z_{\alpha/2} = 1'96$

$$\text{Intervalo} = \left(5'95 - 1'96 \cdot \frac{1'5}{\sqrt{10}},\ 5'95 + 1'96 \cdot \frac{1'5}{\sqrt{10}}\right)$$

$$= (5'02,\ 6'88)$$

b) $E = 1'96 \cdot \frac{1'5}{\sqrt{n}} = 0'5$; $\sqrt{n} = \frac{1'96 \cdot 1'5}{0'5} = 5'88$

$n = 34'57$

El tamaño mínimo de la muestra es

$n = 35$

Opción B

(37)

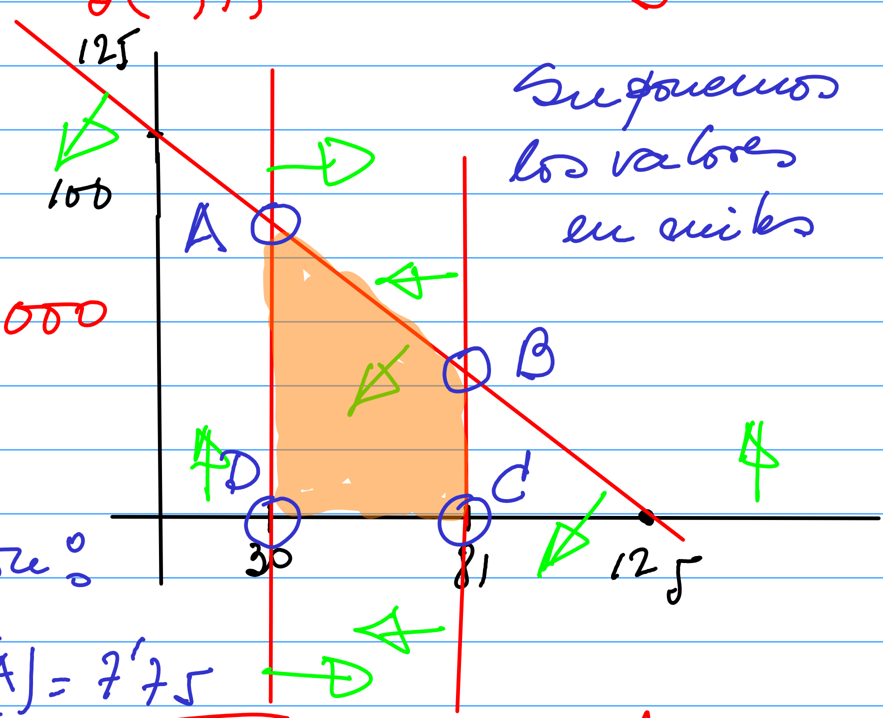
1º) Se desea invertir una cantidad de dinero menor o igual a 125000 €, distribuidos entre acciones A y B. Las A garantizan una ganancia del 10% anual, siendo obligatorio invertir en ellas un mínimo de 30.000 € y un máximo de 81000 €. Las B garantizan una ganancia del 5% anual, siendo obligatorio invertir en ellas un mínimo de 25000 €. La cantidad invertida en acciones de tipo B no puede superar el triple de la cantidad invertida en A. ¿Cuál es la inversión que garantiza la ganancia máxima? ¿Cuál es?

Acciones A ⟶ x Acciones B ⟶ y

función objetivo $f(x,y) = 0'1x + 0'05y$

Restricciones:

$$\begin{cases} x+y \leq 125000 \\ 30000 \leq x \leq 81000 \\ 25000 \leq y \end{cases}$$



Suponemos los valores en miles

Los vértices de la región factible son:

$A = (30, 95) \to f(A) = 7'75$

$B = (81, 44) \to f(B) = \boxed{10'3}$ El beneficio

$C' = (30, 0) \to f(C') = 3$

$D = (81, 0) \to f(D) = 8'1$

es de 10300 €, que se obtiene invirtiendo 81 000 en acciones A, 44000 en B

2º (37) Se considera la función $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2-4}$ $(x \neq \pm 2)$

a) Determínense las asíntotas de f

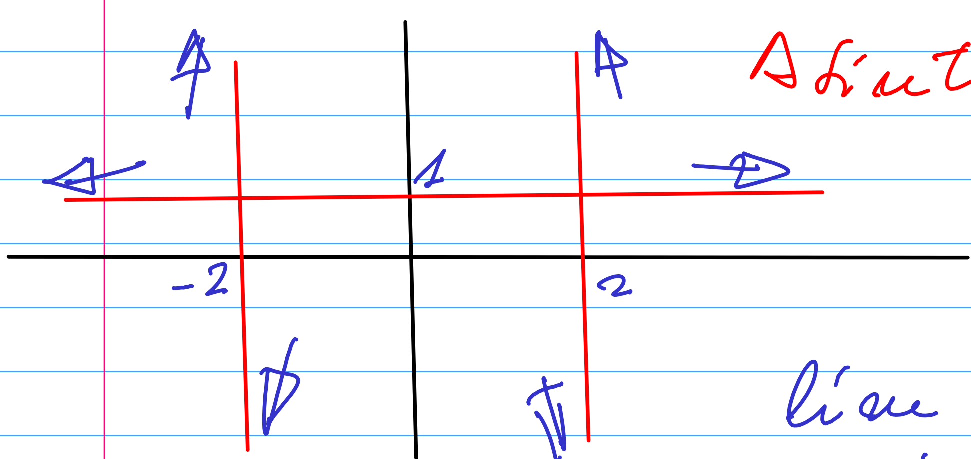
b) Calcúlense los máximos y mínimos relativos y sus intervalos de crecimiento.

c) Calcúlese $\int_3^5 (x^2-4)\, f(x)\, dx$

a) Asíntotas verticales: $\boxed{x = 2 \; ; \; x = -2}$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \;\; || \;\; \lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty \;\; || \;\; \lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$



Asíntota horizontal:

$\boxed{y = 1}$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

b) Máximos, mínimos e intervalos de crecimiento.

$$f(x)=\frac{x^2+2}{x^2-4}\ ;\quad f'(x)=\frac{2x(x^2-4)-2x(x^2+2)}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^3-8x-2x^3-4x}{(x^2-4)^2}=\frac{-12x}{(x^2-4)^2}=0\ \rightarrow\ \boxed{x=0}$$

Al no estar definida en 2 y -2 tenemos que situar esos puntos para estudiar también el crecimiento en ellos aunque sólo hay un máximo en x=0 y=-1/2

f(x) es creciente en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$

f(x) es decreciente en: $(0\ ,2)\cup(2,+\infty)$

Tiene un máximo en (0, -1/2)

C) Puesto que se propone calcular la integral en un intervalo donde f(x) está perfectamente definida, es decir x^2-4 no se hace cero, se puede simplificar:

$$\int_3^5 (x^2-4)\, f(x)\, dx=\int_3^5 \cancel{(x^2-4)}\cdot\frac{x^2+2}{\cancel{x^2-4}}=\int_3^5 (x^2+2)$$

$$G(x)=\frac{x^3}{3}-2x\ ;\quad G(5)=\frac{125}{3}-10=\frac{95}{3}$$

$$G(3)=9-6=3$$

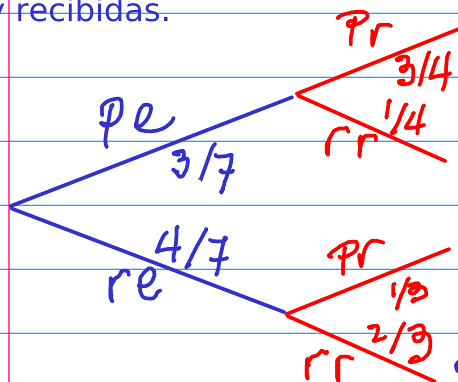
$$\int_3^5 (x^2+2)=\frac{95}{3}-\frac{9}{3}=\boxed{\frac{86}{3}}$$

3º) (2p) Se supone que las señales que emite un determinado telégrafo son punto y raya y que el telégrafo envía un punto con probabilidad 3/7 y una raya con probabilidad 4/7. Cuando se envía punto se recibe raya con pr=1/4 y que cuando envía una raya se recibe un punto con probabilidad 1/3.

a) Si se recibe una raya, ¿cuál es la probabilidad de que se hubiera enviado realmente una raya?

b) Suponiendo que las señales se envían con independencia, ¿cuál es la probabilidad de que si se recibe punto-punto se hubiera enviado raya-raya?

Llamaremos pe "punto enviado" y pr"punto recibido", igualmente re y rr, rayas enviadas y recibidas.



$P(pe \cap pr) = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{4}$

$P(pe \cap rr) = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{4}$

$P(re \cap pr) = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{3}$

$P(re \cap rr) = \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3}$

a) $P(rr) = \frac{3}{28} + \frac{8}{21} = 0'488$; $P(re/rr) = \frac{8/21}{0'488} = 0'78$

b) $P(rr) = \frac{9}{28} + \frac{4}{21} = 0'5119$;

$$P(pe/rr) = \frac{P(pe \cap rr)}{P(rr)} = \frac{9/28}{0'5119} = 0'21$$

$$P(pe/rr) \cdot P(pe/rr) = 0'21 \cdot 0'21 = 0'0438$$