Selectividad Septiembre 2009 Opción A

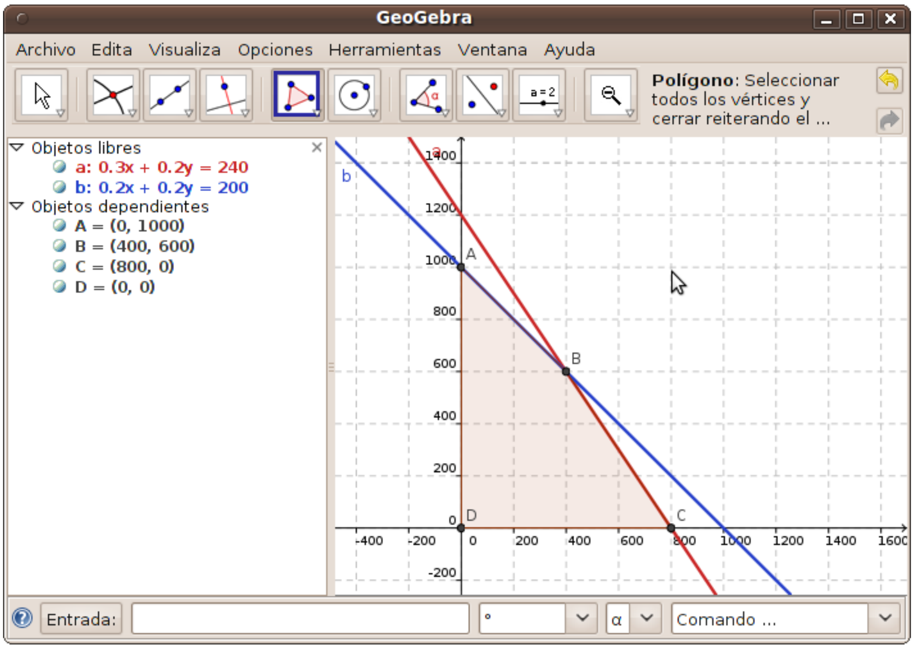
Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Una carpintería vende paneles de contrachapado de dos tipos A y B. Cada m^2 de panel del tipo A requiere $0,3$ horas de trabajo para su fabricación y $0,2$ horas para su barnizado, proporcionando su venta un beneficio de 4 euros. Cada m^2 de panel del tipo B requiere $0,2$ horas de trabajo para su fabricación y $0,2$ horas para su barnizado, proporcionando su venta un beneficio de 3 euros. Sabiendo que en una semana se trabaja un máximo de 240 horas en el taller de fabricación y de 200 horas en el taller de barnizado, calcular los m^2 de cada tipo de panel que debe vender semanalmente la carpintería para obtener el máximo beneficio. Calcular dicho beneficio máximo.

x paneles tipo A, por m² requieren 0,3 hora de trabajo y 0,2 horas de barnizado: beneficio=4€
y paneles tipo B, por m² requieren 0,2 horas de trabajo y 0,2 horas de barnizado: beneficio=3€

Por semana se trabaja 240 horas en fabricación y 200 horas en barnizado. La función de beneficio que hay que maximizar es **f(x,y)=4x+3y**

Restricciones:

$$\begin{cases} 0,3\,x+0,2\,y\leqslant 240 \\ 0,2\,x+0,2\,y\leqslant 200 \\ x\,,\,y\geq 0 \end{cases}$$



La región factible es la marcada en la figura y los vértices A, B y C tienen las coordenadas que aparecen en la figura. Los valores de la función objetivo, que hemos de maximizar son:

f(A)=3000
f(B)=3400
f(C)=3200

El valor de **f** se hace máximo en el punto B=(400,600), lo que significa que hay que fabricar 400 m² de tableros tipo A y 600 m² de tableros tipo B. En este caso el **beneficio máximo** obtenido en una semana es de **3400 €**.

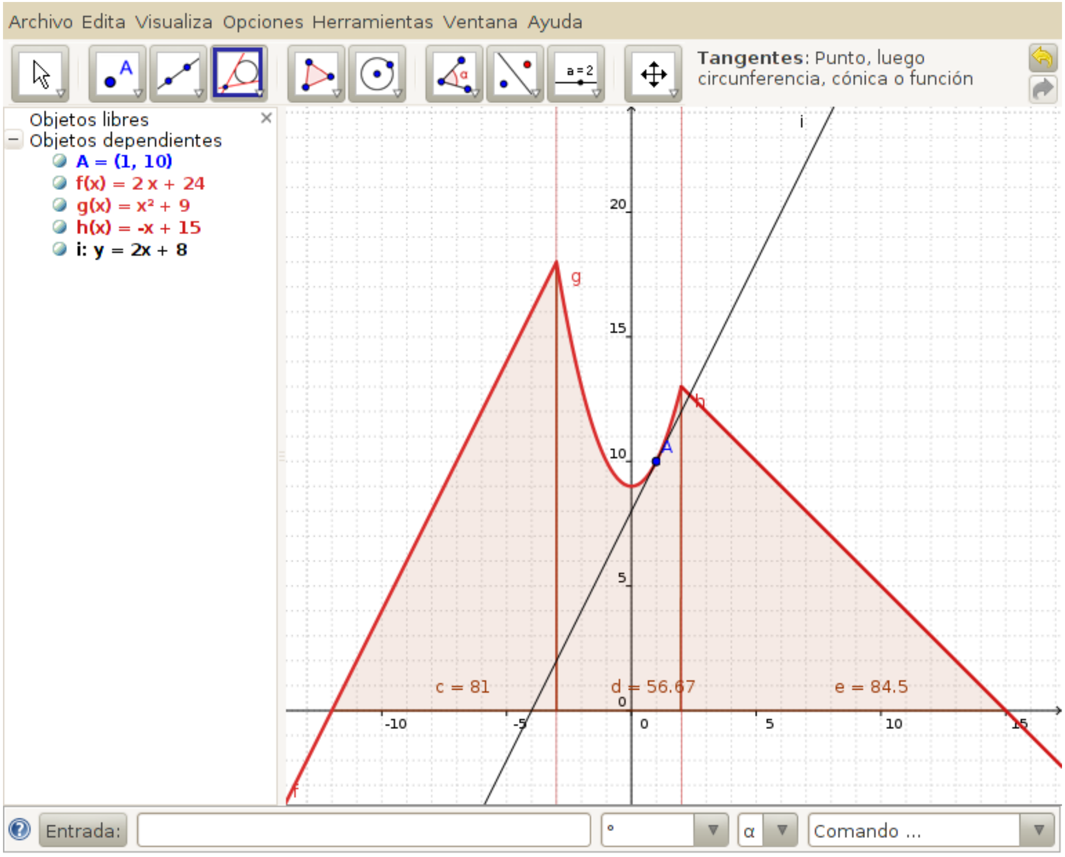
Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+24 & \text{si} \quad x \le -3 \\ x^2+9 & \text{si} \quad -3 < x \le 2 \\ -x+15 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Represéntese gráficamente la función f.
b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.
c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y el eje OX.

a) Representamos los tres tramos que coinciden en los puntos de separación -3 y 2. Aunque no nos piden estudiar la continuidad ni la derivabilidad, la función es continua en R pero no es derivable en los puntos de unión ya que las derivadas laterales no coinciden. Como tenemos que derivar en el segundo apartado para hallar la tangente en el punto x=1, que está dentro del primer tramo, ahí no hay problemas de derivabilidad. El dibujo realizado con Geogebra es el que aparece en la figura, en la que se han incluido líneas verticales de separación entre los intervalos.

b) Para hallar la ecuación de la tangente en x=1 trabajamos con el trozo de curva comprendida en el segundo tramo (la parábola, de ecuación $y=x^2+9$). Su derivada es $f'(x)=2x$; $f'(1)=2$; $f(1)=10$. La ecuación de la recta tangente es: **y**=f(1)+f'(1)(x-1)=10+2(x-1)=**2x+8**



c) Para hallar el área comprendida entre la gráfica de f y el eje X debemos realizar tres integrales correspondientes a los tres tramos de la función, considerando los extremos a izquierda y derecha los puntos de corte con el eje X: -12; 15. El área total será la suma de las tres áreas: del primer tramo, entre -12 y -3; del segundo tramo, entre -3 y 2; y del tercero, entre 2 y 15.

$$Intervalo[-12,-3] \rightarrow G(x)=\int 2x+24=x^2+24x\,;\, G(-12)=144-24*12=-144$$
$$G(-3)=9+24*(-3)=-63 \rightarrow G(-3)-G(-12)=-63-(-144)=81 \rightarrow Área1=81u^2$$

$$Intervalo[-3,2] \rightarrow G(x)=\int x^2+9=\frac{x^3}{3}+9x\,;\, G(-3)=-36$$
$$G(2)=\frac{8}{3}+18=20{,}67 \rightarrow G(2)-G(-3)=20{,}67+36=56{,}67 \rightarrow Área2=56{,}67\,u^2$$

$$Intervalo[2,15] \rightarrow G(x)=\int -x+15=\frac{-x^2}{2}+15x\,;\, G(2)=28\,;$$
$$G(15)=112{,}5 \rightarrow G(15)-G(2)=112{,}5-28=84{,}5 \rightarrow Área1=84{,}5\,u^2$$

Área total = 81u²+56,67u²+84,5u² = **222,17u²**

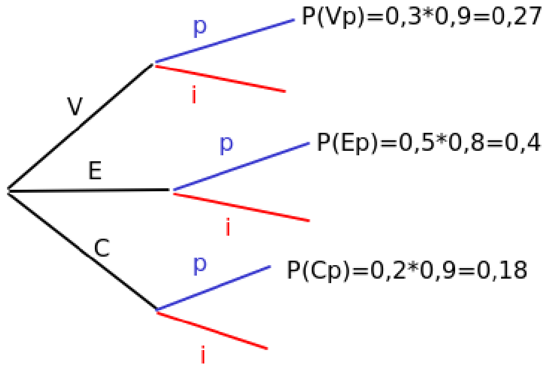
Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

En un cierto banco el 30% de los créditos concedidos son para vivienda, el 50% se destinan a empresas y el 20% son para consumo. Se sabe además que de los créditos concedidos a vivienda, el 10% resultan impagados, de los créditos concedidos a empresas son impagados el 20% y de los créditos concedidos para consumo resultan impagados el 10%.

a) Calcúlese la probabilidad de que un crédito elegido al azar sea pagado.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un crédito elegido al azar se haya destinado a consumo, sabiendo que se ha pagado?

Como se piden probabilidades relacionadas con créditos pagados estudiamos sólo este caso, los impagados no se contemplan.



a) P(p)=0,27+0,4+0,18=0,85

b) P(C/p)=P(Cp)/P(p)=0,18/0,85=0,21

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Se supone que el tiempo de una conversación en un teléfono móvil se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 1,32 minutos. Se desea estimar la media del tiempo de las conversaciones mantenidas con un error inferior o igual en valor absoluto a 0,5 minutos y con un grado de confianza del 95%.

a) Calcúlese el tamaño mínimo de la muestra que es necesario observar para llevar a cabo dicha estimación mediante la media muestral.

b) Si se supone que la media del tiempo de las conversaciones es de 4,36 minutos y se elige una muestra aleatoria simple de 16 usuarios, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de las conversaciones de la muestra esté comprendido entre 4 y 5 minutos?

a)

$$E=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\rightarrow\; E=0{,}5;\; \sigma=1{,}32;\; 95\% \;\rightarrow\; z_{\alpha/2}=1{,}96$$

$$E=1{,}96\cdot\frac{1{,}32}{\sqrt{n}}=0{,}5;\; \sqrt{n}=\frac{1{,}96*1{,}32}{0{,}5}=5{,}1744;\quad n=26{,}8$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de **27**

b) Si la población inicial es N(4,36;1,32), la media de las muestras de tamaño 16 se distribuye

$$N(4{,}36;\frac{1{,}32}{\sqrt{16}})=N(4{,}36;0{,}33)$$

$$P(4<\bar{x}<5)=P(\frac{4-4{,}36}{0{,}33}<\bar{x}<\frac{5-4{,}36}{0{,}33})=P(-1{,}09<z<1{,}94)=$$
$$=P(1{,}94)-P(-1{,}09)=P(1{,}94)-(1-P(1{,}09))=0{,}9738-(1-0{,}8621)=0{,}8359$$