Selectividad Septiembre 2009 Opción B

Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes, A, y su ampliada, A', en función del parámetro k

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\begin{cases} x+y+z &= 3 \\ x+ky+z &= 3 \\ kx-3z &= 6 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k.
b) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.
c) Resuélvase el sistema para $k=3$.

a) Como hay menores de dimensión 2 distintos de cero, que no dependen de **k**, el rango de A es al menos de 2. Hacemos cero el determinante de A para ver qué valores de **k** lo anulan.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ k & 0 & -3 \end{vmatrix}=-3k+k-k^2+3=-k^2-2k+3=0\rightarrow k=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{-2};k=\begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}\rightarrow rango(A)=2$$

Discusión:
Si **k≠1, k≠**-3 rango(A)=3=rango(A'): El sistema es **compatible determinado**

Si **k=1** rango(A)=2 tenemos que ver el rango(A'). Como sobra una columna la sustituimos por los términos independientes y hallamos su determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}=0 \ \ (dos\,filas\,iguales)$$ El rango(A')=2. El sistema es **compatible indeterminado**

Si **k=-3** rango(A)=2 tenemos que ver el rango(A'). Como sobra una columna la sustituimos por los términos independientes y hallamos su determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-18-9-27-6\neq 0$$ El rango(A')=3. El sistema es **incompatible**

b) El sistema tiene infinitas soluciones cuando **k=1**, eliminamos una fila y resolvemos pasando una incógnita al segundo miembro:

$$\begin{cases} x+y=3-z \\ x=6-3z \end{cases} \quad y=3-z-6+3z=2z-3\rightarrow Soluciones: \begin{matrix} z=\lambda \\ x=6-3\lambda \\ y=2\lambda-3 \end{matrix} \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

c) Para **k=3** el sistema es compatible determinado. Por Cramer: $|A|=-k^2-2k+3=-12$

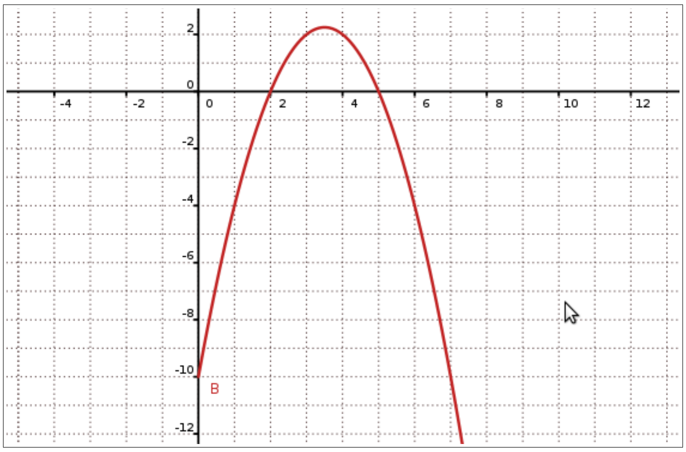
$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{-12}=\frac{-27+6-18+9}{-12}=\frac{-30}{-12}=\frac{5}{2}; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \end{vmatrix}}{-12}=0$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{-12}=\frac{18+9-27-6}{-12}=\frac{1}{2}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
El beneficio semanal (en miles de euros) que obtiene una central lechera por la producción de leche desnatada está determinado por la función:

$$B(x) = -x^2 + 7x - 10$$

en la que x representa los hectolitros de leche desnatada producidos en una semana.
a) Represéntese gráficamente la función $B(x)$ con $x \geq 0$.
b) Calcúlense los hectolitros de leche desnatada que debe producir cada semana la central lechera para maximizar su beneficio. Calcúlese dicho beneficio máximo.
c) Calcúlense las cantidades mínima y máxima de hectolitros de leche desnatada que debe producir la central lechera cada semana para no incurrir en pérdidas (es decir, beneficio negativo).



a) Se trata de una parábola invertida dibujada para x≥0.
b) Para maximizar su valor derivamos la función beneficio e igualamos a cero.
B'(x)=-2x+7=0; x=7/2=3,5; Como
B''(x)=-2 se trata de un máximo.
El beneficio máximo se alcanza con 3,5 hectólitros y su valor es
B(3,5)=2,25=2250€
c) Para estudiar la zona sin pérdidas tenemos que resolver la inecuación:
$-x^2+7x-10>0$
Primero igualamos a cero y hallamos los puntos de corte, que son: x=2 y x=5. El intervalo donde se cumple es: (2,5), es decir, la cantidad mínima y máxima son 2 y 5 hectólitros respectivamente.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)
La probabilidad de que a un habitante de un cierto pueblo de la Comunidad de Madrid le guste la música moderna es igual a 0,55; la probabilidad de que le guste la música clásica es igual a 0,40 y la probabilidad de que no le guste ninguna de las dos es igual a 0,25. Se elige al azar un habitante de dicho pueblo. Calcúlese la probabilidad de que le guste:
a) al menos uno de los dos tipos de música.
b) la música clásica y también la música moderna.
c) sólo la música clásica.
d) sólo la música moderna.

Suceso M=le gusta la música moderna: P(M)=0,55
Suceso C=le gusta la música clásica: P(C)=0,40
P(M'∩C')=0,25

a) P(M'∩C')=P[(M∪C)']=1-P(M∪C)=0,25 → **P(M∪C)**=1-0,25=**0,75**

b) P(M∪C)=P(M)+P(C)-P(M∩C); 0,75=0,55+0,40-P(M∩C); **P(M∩C)**=0,55+0,40-0,75=**0,20**

c) **P(C-M)**=P(C)-P(M∩C)=0,40-0,20=**0,20**

d) P(M-C)=P(M)-P(MÇC)=0,55-0,20=0,35

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Se supone que la estancia (en días) de un paciente en un cierto hospital se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 9 días. De una muestra aleatoria simple formada por 20 pacientes, se ha obtenido una media muestral igual a 8 días.
a) Determínese un intervalo de confianza del 95% para la estancia media de un paciente en dicho hospital.
b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral mínimo que ha de observarse para que dicho intervalo de confianza tenga una longitud total inferior o igual a 4 días?

a) El intervalo de confianza para la media de estancias en el hospital es:

$$\left(\bar{x}-Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\bar{x}+Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right); \quad \sigma=9;n=20;\bar{x}=8; \quad 95\%\rightarrow Z_{\alpha/2}=1{,}96;$$

$$\left(8-1{,}96.\frac{9}{\sqrt{20}};8+1{,}96.\frac{9}{\sqrt{20}}\right)=(4{,}06;11{,}94)$$

b) Como el intervalo de confianza tiene una longitud doble que el error de la estimación, el objetivo en este caso es conseguir que ese error sea inferior a 2

$$E=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow E=2; \ \sigma=9; \ 95\% \rightarrow z_{\alpha/2}=1{,}96$$

$$E=1{,}96\cdot\frac{9}{\sqrt{n}}=2; \ \sqrt{n}=\frac{1{,}96*9}{2}=8{,}82; \quad n=77{,}8$$

El tamaño de la muestra deber ser como mínimo de 78 pacientes.